Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería matemática
Cálculo Diferencial e Integral
Sección 6
Semestre Primavera 2013

Clase Auxiliar N°7: Sumas de Riemann

Profesor: Felipe Célèry
Auxiliar: Bruno Aguiló

P1. Sea la sucesión $a_n = \int\limits_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$,

(a) Explica por qué (a_n) está bien definida, es decir, por qué q^x es Riemann integrable en $[0, n]$, y muestra que es creciente.

(b) Calcula las sumas de Riemann superior e inferior para q^x y la partición $\mathcal{P} = \{0, 1, ..., n\}$.

(c) Utiliza las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n):

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q\tfrac{1-q^n}{1-q} \leq \int\limits_0^n q^x dx \leq \tfrac{1}{1-q}$$

(d) Concluye que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\tfrac{q}{1-q} \leq a \leq \tfrac{1}{1-q}.$$

P2. Usando sumas de Riemann, calcula $\int\limits_a^b e^x dx$, con $a < b$.

P3. Demuestra que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{i}{n}\right)}$. Ahora, aplicando logaritmo y usando sumas de Riemann, calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

P4. Usando sumas de Riemann, calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} i2^{i/n}$

P5. Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int\limits_0^1 \frac{1+x}{2+x}$

(b) $\int\limits_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}$