Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
26 de Agosto, 2013

Auxiliar #2MA1102-6 Álgebra Lineal. : Matrices

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

P1. Sean P y Q matrices de $n \cdot n$ tales que $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$. Demuestre que $(P-Q)^2$ conmuta con P y Q.

P2. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Demuestre que $A^n = \begin{pmatrix} 1-3n & -9n \\ n & 1+3n \end{pmatrix}$.

P3. Para un $n \in \mathbb{N}$. Definimos la matriz $I \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ como sigue:

$$I_{ik} = 1 \Leftrightarrow i = k$$

$$I_{ik} = 0 \Leftrightarrow i \neq k$$

A la matriz I la llamamos Identidad. Demuestre que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ se cumple que:

$$A = IA = AI$$

P4. Sean a, b, c, d números reales tales que $ad - bc \neq 0$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demuestre que:

$$A \begin{pmatrix} \frac{d}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} \\ \frac{-c}{\lambda} & \frac{a}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} \\ \frac{-c}{\lambda} & \frac{a}{\lambda} \end{pmatrix} A = I$$

Donde λ es algún número real que depende de los parámetros.
<u>Hint:</u> Vea la P1 de la auxiliar 1.
<u>Obs:</u> Lo que en este problema demostramos es que cuando $ad \neq bc$ entonces $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible y

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

P5. Sean $a \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$:

a) Determine a que conjuntos pertenecen ab y ba respectivamente.

b) Muestre que ba se puede escribir de las siguientes maneras:

$$ba = \begin{bmatrix} a_1 b | & a_2 b | & \dots | & a_n b \end{bmatrix}$$

$$ba = \begin{bmatrix} b_1 a \\ b_2 a \\ \vdots \\ b_n a \end{bmatrix}$$

Donde la primera notación representa las columnas de la matriz y la segunda representa las filas de la matriz.

<u>Propuesto:</u> Sea A una matriz de $n \cdot n$. Justifique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) Si $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.

b) Si $A^2 = A \Rightarrow A = I \ \vee \ A = 0$.

c) Si $A^2 = I \Rightarrow A = I \ \vee \ A = -I$.

Notación: Si $A \in \mathcal{M}_{nm}$ entonces se ve de la siguiente manera.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots & & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Definición: Si $A \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{rm}(\mathbb{R})$ entonces se define el producto de matrices como sigue:

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n$$

Donde $(c_{ji}) = C = AB \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$.