Descomposición LDU

Auxiliares: Mónica Carvajal Pinto- Johan Van der Molen

25 de agosto de 2008

Se tiene A $\varepsilon M_{n,n}(\mathbb{R})$, es decir, una matriz cuadrada y se procede a escalonarla usando SOLO matrices del tipo $E_{p,q}(\alpha, 1)$, sabemos que cuando $p < q$ la matriz es triangular inferior y su inversa $E_{p,q}(-\alpha, 1)$ tambien lo es. Cuando , mediante premultiplicaciones por matrices de suma lleguemos a una matriz escalonada tendremos algo de esta forma:

$$\bar{A} = E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_j \cdot A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Ahora como cualquier $E_i = E_{p,q}(\alpha, 1)$ es triangular inferior invertible con sólo unos en la diagonal, se cumple:
$E_1 \cdot ... \cdot E_j$es triangular inferior con solo unos en la diagonal . y como sabemos su inversa$(E_1 \cdot ... \cdot E_j)^{-1}$ tambien lo es.(Recuerden que cuando multiplicamos o invertimos matrices triangulares inferiores el resultado tambien es una matriz triangular inferior) . Ademas $(E_1 \cdot ...E_j)^{-1} = E_j^{-1} \cdot ... \cdot E_1^{-1}$
Despejamos A y obtenemos

$$A = (E_1 \cdot ...E_j)^{-1} \cdot \bar{A}$$

es decir , la matriz A se puede escribir como la multiplicacion de una matriz triangular inferior$(L = (E_1 \cdot ...E_j)^{-1})$ y una triangular superior$(U = \bar{A})$

$$A = L \cdot U, sellamadescomposición LU de A$$

Ahora por teorema visto en clases, sabemos que A es invertible $\Longleftrightarrow$ la matriz escalonada $\bar{A}$ no tiene ceros en la diagonal.

Para la descomposición LDU queremos que la matriz triangular superior (U=$\bar{A}$) sólo tenga unos en la diagonal, como A es invertible sabemos que todos los $\bar{a}_{ii}$ son no nulos , por lo tanto, para convertirlos en unos , tendremos que dividir la fila i de la matriz U por $\bar{a}_{ii}$ y asi lograremos nuestro objetivo.
Como

$$U = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}} & \cdots & \frac{\bar{a}_{1n}}{\bar{a}_{11}} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{\bar{a}_{(n-1)n}}{\bar{a}_{(n-1)(n-1)}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = D \cdot \tilde{U}$$

Con D diagonal y $\tilde{U}$ triangular superior con solo unos en la diagonal $\Longrightarrow$

$$A = L \cdot U = L \cdot D \cdot \tilde{U}$$

Finalmente encontramos la Descompocisión LDU de A dada por:

$$A = L \cdot D \cdot \tilde{U}$$

$$A = (E_1 \cdot ...E_j)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\bar{a}_{12}}{\bar{a}_{11}} & \cdots & \frac{\bar{a_{1n}}}{\bar{a}_{11}} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{\bar{a}_{(n-1)n}}{\bar{a}_{(n-1)(n-1)}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Notas

1. 1 Si la matriz A no es invertible entonces No posee descomposicion LDU.
1. 2 Si A tiene factorización LDU entonces es unica

2. Ejemplo

Encuentre la descomposición LDU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Solucion:

Primero encontramos la matriz $\bar{A}$ escalonada. $E_{1,3}(1) \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$E_{1,2}(1/3) \cdot E_{1,3}(1) \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$E_{2,3}(-9/2) \cdot E_{1,2}(1/3) \cdot E_{1,3}(1) \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Ya tenemos la matriz$\bar{A}$ y sabemos que

$$A = (E_1 \cdot ...E_j)^{-1} \cdot \bar{A}$$

Por lo tanto, necesitamos encontrar

$$(E_{2,3}(-9/2) \cdot E_{1,2}(1/3) \cdot E_{1,3}(1))^{-1} = E_{1,3}(1))^{-1} \cdot E_{1,2}(1/3)^{-1} \cdot E_{2,3}(-9/2)^{-1}$$

Usamos que $E_{p,q}(\alpha)^{-1} = E_{p,q}(-\alpha) \Longrightarrow$

$E_{1,3}(1)^{-1} \cdot E_{1,2}(1/3)^{-1} \cdot E_{2,3}(-9/2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9/2 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1 & 9/2 & 1 \end{pmatrix} = L$

$\Longrightarrow A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1 & 9/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Ahora verificamos si A era invertible viendo la diagonal de la matriz $\bar{A}$, como lo es, buscamos la descomposición LDU. La matriz D siempre será la diagonal de la matriz $\bar{A}$ y la matriz U es el resultado de dividir cada fila de $\bar{A}$ por el elemento de la diagonal$\Longrightarrow$

$$U = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente $A = L \cdot D \cdot \tilde{U}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1 & 9/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$