Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
7 de Octubre, 2013

Auxiliar #6MA1102-6 Álgebra Lineal. : Pauta P4

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

P4: Sean $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\prod$ el plano de ecuación $2x - y - z = 2$.

a) Sea $R \in \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal del punto P sobre el plano $\prod$. Pruebe que $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Calcular la proyección ortogonal del punto P sobre la recta que pasa por R con dirección $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Sea Q la proyección calculada en b). Determine la ecuación cartesiana del plano que contiene a P, Q y R.

Pauta: En este problema ocuparemos los siguientes resultados del apunta (pagina 65 y 66 del apunte):

- La proyección ortogonal de un punto $q \in \mathbb{R}^n$ sobre una recta $L_{p,d} \subseteq \mathbb{R}^n$ esta dada por:

$$r = p + \langle q - p, d \rangle \frac{d}{\|d\|^2}.$$

- La proyección ortogonal de un punto $q \in \mathbb{R}^n$ sobre un plano $\Pi_{p,d_1,d_2} \subseteq \mathbb{R}^n$ esta dada por:

$$r = q + \langle p - q, n \rangle \frac{n}{\|n\|^2}, \quad \text{donde } n \text{ puede ser cualquier vector perpendicular a } \Pi.$$

a) Primero notemos que:

$$\Pi : 2x - y - z = 2 \Leftrightarrow 2(x-1) - y - z = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Así llegamos a la forma normal del plano y tenemos que $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y que $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Evaluando en la formula de la proyección de un punto a un plano obtenemos:

$$r = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \|^2}$$

$$r = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Evaluando en la formula de proyección de un punto a una recta obtenemos:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \|^2}$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1}$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Encontremos los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $ax + by + cz = d$ sea compatible con los puntos dados. Evaluando en R obtenemos que $a = d$. Evaluando en Q obtenemos que $a - 2b = d \Leftrightarrow b = 0$. Y evaluando en P obtenemos que $5a - 2c = d \Leftrightarrow 4a = 2c \Leftrightarrow 2a = c$. Luego como este es un sistema de 4 incógnitas y 3 ecuaciones tenemos una variable libre, entonces para obtener una solución impongamos que $d = 1$ con lo que obtenemos que $a = 1$ y $c = 2$. Así la ecuación cartesiana del plano queda:

$$x + 2z = 1.$$