Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
1 de Diciembre, 2013

Auxiliar #13MA1102-6 Álgebra Lineal. : Forma Cuadráticas y Cónicas

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Martín Castillo

P1. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica y definida negativa, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^t Ax - b^t x + c$$

Queremos maximizar f.

a) Suponga que $n = 1$. Y diga que forma toma f y encuentre su máximo.

b) Sea $x_0 = \frac{1}{2}A^{-1}b$. Compruebe que se cumple lo siguiente:

$$f(x) = (x - x_0)^t A(x - x_0) - {x_0}^t Ax_0 + c$$

c) Usando que A es definida negativa muestre que el único máximo se alcanza en x_0.

P2. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica cuyos valores propios son:

$$\lambda_i = 1,\ 1 \le i \le k,$$

$$\lambda_i = 0,\ k + 1 \le i \le n.$$

Donde $1 \le k \le n-1$ y la descomposición de A es $A = PDP^t$ con P matriz ortogonal y D la matriz con los valores propios.

a) Sea $z = P^t x$ y $x \in \mathbb{R}^n$, probar que $\|Ax\|^2 = \|Dz\|^2$ y que $\|x\|^2 = \|z\|^2$. Concluir que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|^2 \le \|x\|^2$.

b) Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $\|Ax_0\|^2 = \|x_0\|^2$.

P3. Determine el tipo, centro y ángulo de rotación de la siguiente cónica:

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 1$$

La siguiente igualdad le sera útil. Sean $a, b, c, d, f \in \mathbb{C}$ entonces:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dy + fx = (x, y)\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d, f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$