Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 13-2

Control 1

P1. a) (4,0 ptos.) Considere el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & b & 1 \\ a & 2b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ b \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Determine los valores de a y b tales que el sistema: tenga solución única, tenga infinitas soluciones, no tenga soluciones.

b) b1) (1,0 pto.) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}.$$

Calcule, escalonando, A^{-1}.

b2) (1,0 pto.) Sea B la matriz análoga a A pero de tamaño $n \times n$, es decir

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{o bien } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Justifique que

1) B es invertible.
2) La generalización natural del caso $n = 4$ dada por

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

es la inversa de B.

P2. Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el plano $\Pi: \ x + y = -2$.

(a) (3,0 ptos.) Si en el punto F se ubica un foco que ilumina los puntos A, B y C, se pide determinar las sombras A', B' y C' de tales puntos sobre el plano Π. Es decir, determinar la intersección de las rectasque pasan por los puntos $F - A$, $F - B$ y $F - C$ con el plano Π.

(b) (1,0 pto.) Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por A' y B'.

(c) (2,0 ptos.) Determinar la recta de intersección del plano Π con el plano que contiene a los puntos A, B y C.

P3. (a) (2,0 ptos.) Una matriz $M \in \mathcal{M}_{nn}$ se llama idempotente si $M^2 = M$. Si $C, D \in \mathcal{M}_{nn}$ son tales que $C = CD$ y $D = DC$, demuestre que C y D son idempotentes.

(b) (2,0 ptos.) Demuestre que si A, B y $(A + B^{-1})$ son matrices invertibles, entonces $(A^{-1} + B)$ también es invertible y su inversa es $A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.

(c) (2,0 ptos.) Considere las matrices $P, Q \in \mathcal{M}_{nn}$ tales que $P^2 = P$ y $Q = I - P$. Demuestre que $Q^3 = Q$. Si P es invertible, use las condiciones dadas en este punto para probar que $P = I$ y $Q = 0$.

Justifique cada una de sus respuestas
Tiempo: 3:00 hrs.