Control 2

P1. a) (1,0 pto.) Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto y $L \subseteq \mathbb{R}^3$ una recta de vector posición A y vector director d ($P \notin L$). Determine el punto Q, simétrico de P con respecto a L.

b) (3,0 ptos.) Considere las rectas $L : x = A + \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ y $L' : x = B + \mu d', \quad \mu \in \mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto de puntos simétricos de cada punto de L' con respecto a L es una recta y determine su ecuación vectorial.

c) (2,0 ptos.) Para el caso particular de las rectas

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } L' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

escriba la ecuación vectorial de la recta descrita en el punto b).

P2. (a) Considere la función $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{pmatrix} a_1 - a_3 & a_0 \\ 2a_0 - 2a_1 + a_2 - a_3 & a_0 + a_2 - 3a_3 \end{pmatrix}$$

(i) (1,0 pto.) Demuestre que T es una transformación lineal.

(ii) (3,0 ptos.) Determinar bases y dimensiones de $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$.

(b) (2,0 ptos.) Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ de dimensiones m y n respectivamente. Se define el espacio vectorial $V \times W$ con las operaciones

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \text{ y } \lambda(v, w) + (\lambda v, \lambda w).$$

Pruebe que $\dim(V \times W) = m + n$.

P3. Sea V el espacio vectorial de las matrices de 3×3 con coeficientes reales, definido por

$$V = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right\}$$

(espacio de las matrices triangulares superiores).
Se define $W = \{A \in V |$ la suma de cada fila de A es cero$\}$.

(i) (2,0 ptos.) Pruebe que W es subespacio vectorial de V.

(ii) (1,0 pto.) Pruebe que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un generador de W.

(iii) (1,0 pto.) Extraiga de G una base para W.

(iv) (2,0 ptos.) Sea $U = \{B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | B \text{ es diagonal } \}$. Pruebe que $V = W \oplus U$.

Justifique cada una de sus respuestas
Tiempo: 3:00 hrs.