Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal 13-2

Control 3

P1. a) (3,0 ptos.) Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Se sabe que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-3)^2 \text{ y que } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda = 3$. Se pide construir la matriz A.

b) (3,0 ptos.) Considere la matriz $C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la matriz C es diagonalizable? Justifique su respuesta.

P2. Sea S_2 el espacio vectorial de las matrices simétricas de 2×2 con coeficientes reales. Dada $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considere la transformación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to S_2$ definida por

$$T(X) = BX + X^t B^t,$$

donde $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) (1,0 pto.) Verificar que $T(X)$ esá bien definida, es decir, $T(X) \in S_2$.

(b) (3,0 ptos.) Para $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } S_2.$$

(c) (2,0 ptos.) Para $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ encuentre bases y dimensión para $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

P3. Sea $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$ un polinomio de grado m y A una matriz cuadrada. Se define

$$q(A) = b_0 I + b_1 A + b_2 A^2 + \ldots + b_m A^m.$$

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es una matriz diagonalizable, $p(\lambda)$ su polinomio característicos y $A = PDP^{-1}$ su diagonalización, se pide:

i) (2,0 ptos.) Demostrar que $p(D) = 0$.

ii) (2,0 ptos.) Demostrar que $p(A) = 0$.

iii) (2,0 ptos.) Probar, usando inducción sobre m y el punto ii), que $\forall m \in \mathbb{N}$, A^m es combinación lineal de $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.

Justifique cada una de sus respuestas
Tiempo: 3:00 hrs.