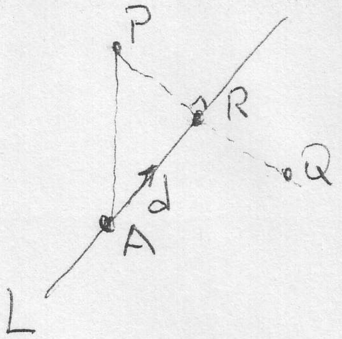
Algebra Lineal Control 2 (13-2)

Pauta Problema 1

a)



Previo, para el punto R, proyección ortogonal de P sobre la recta L se tiene

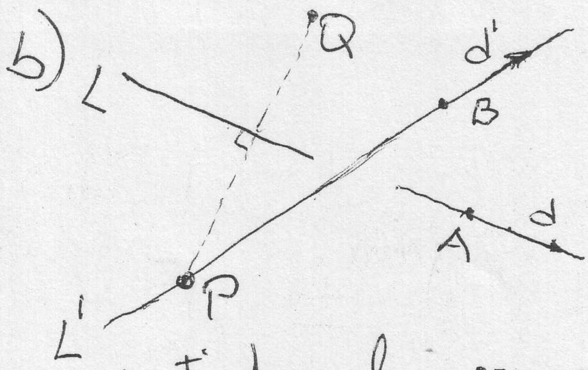
$$R = A + \frac{\langle AP, d\rangle}{\|d\|^2} d$$

0.3

Entonces para el punto Q simétrico de P c/r a L se tiene $Q = P + 2\,PR = P + 2(R - P) = 2R - P$

0.7 Así, $Q = 2A + 2\frac{\langle AP, d\rangle}{\|d\|^2} d - P = 2A - P + 2\frac{\langle AP, d\rangle}{\|d\|^2} d$

b)



$L: x = A + \lambda d$; $L': x = B + \mu d'$

Sea P un punto que recorre L', es decir

$P \in L' \wedge x_P = B + \mu d'$, $\mu \in \mathbb{R}$

El punto Q, simétrico de P c/r a L satisface la ecuación encontrada en (a), es decir:

1.0 $X_Q = 2A - P + 2\frac{\langle AP, d\rangle}{\|d\|^2} d = 2A - X_P + 2\frac{\langle X_P - A, d\rangle}{\|d\|^2} d$

y reemplazando $x_P = B + \mu d'$ queda $X_Q = 2A - (B + \mu d') + 2\frac{\langle B + \mu d' - A, d\rangle}{\|d\|^2} d$

agrupando $X_Q = 2A - B - \mu d' + 2\left[\frac{\langle B - A, d\rangle}{\|d\|^2} + \mu\frac{\langle d, d'\rangle}{\|d\|^2}\right] d$

1.5 así $X_Q = 2A - B + 2\frac{\langle B - A, d\rangle}{\|d\|^2} d + \mu\left(\frac{2\langle d, d'\rangle}{\|d\|^2} d - d'\right)$

Llamando $S = 2A - B + 2\frac{\langle B - A, d\rangle}{\|d\|^2} d$ que es un punto y

$n = \frac{2\langle d, d'\rangle}{\|d\|^2} d - d'$ que es un vector la ecuación

0.5 queda $X_Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S + \mu n$ claramente una recta.

c) Para el caso particular $L: x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $L': x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

los datos a ocupar en la ecuación de la recta del punto (b) son $A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $d' = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

Entonces $X_Q = 2A - B + 2\dfrac{\langle B-A, d\rangle}{\|d\|^2}d + \mu\left(\dfrac{2\langle d,d'\rangle}{\|d\|^2}d - d'\right)$

0.5

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{2\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{(\sqrt{1})^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\left(\frac{2\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{(\sqrt{1})^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow X_Q = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{2\cdot 1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\left(\frac{-2}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

1.5

$$X_Q = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \overset{\text{o bien}}{=} \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Pauta Problema 2

a) $T: P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{22}(\mathbb{R})$; $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_1-a_3 & a_0 \\ 2a_0-2a_1+a_2-a_3 & a_0+a_2-3a_3 \end{pmatrix}$

i) Probar que T es transformación lineal

Sean $P(x), Q(x) \in P_3(\mathbb{R})$ ∧ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\begin{cases} P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \\ Q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3 \end{cases}$

Por demostrar que $T(\alpha P(x) + \beta Q(x)) = \alpha T(P(x)) + \beta T(Q(x))$

Entonces $T[\alpha(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) + \beta(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)]$

0.5 $\longrightarrow$ $= T[\alpha a_0+\beta b_0 + (\alpha a_1+\beta b_1)x + (\alpha a_2+\beta b_2)x^2 + (\alpha a_3+\beta b_3)x^3]$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1+\beta b_1-\alpha a_3-\beta b_3 & \alpha a_0+\beta b_0 \\ 2(\alpha a_0+\beta b_0) - 2(\alpha a_1+\beta b_1) + (\alpha a_2+\beta b_2) - (\alpha a_3+\beta b_3) & (\alpha a_0+\beta b_0) + (\alpha a_2+\beta b_2) - 3(\alpha a_3+\beta b_3) \end{bmatrix}$$

0.5 $\longrightarrow$ $= \alpha \begin{bmatrix} a_1-a_3 & a_0 \\ 2a_0-2a_1+a_2-a_3 & a_0+a_2-3a_3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b_1-b_3 & b_0 \\ 2b_0-2b_1+b_2-b_3 & b_0+b_2-3b_3 \end{bmatrix} = \alpha T(P(x)) + \beta T(Q(x))$

ii) Bases y dimensiones de $Ker(T)$ e $Im(T)$

Para determinar una base de $Ker(T)$, sea $u \in Ker(T) \Rightarrow T(u) = 0$

Así $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = \begin{bmatrix} a_1-a_3 & a_0 \\ 2a_0-2a_1+a_2-a_3 & a_0+a_2-3a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

de donde $\left.\begin{array}{r} a_1-a_3=0 \\ a_0=0 \\ 2a_0-2a_1+a_2-a_3=0 \\ a_0+a_2-3a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0=0 \\ a_1=a_3 \\ a_2=3a_3 \\ a_3=a_3=\lambda \end{array} \Rightarrow Ker(T) = \{\lambda(x+3x^2+x^3) / \lambda \in$

1.0 $\longrightarrow$ entonces $Ker(T) = \langle \underbrace{\{x+3x^2+x^3\}}_{\text{Base}} \rangle$ y $dim(Ker(T)) = 1$

Para encontrar una base de $Im(T)$ se puede proceder como sigue

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=\begin{pmatrix} a_1-a_3 & a_0 \\ 2a_0-2a_1+a_2-a_3 & a_0+a_2-3a_3\end{pmatrix}=a_0\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}+a_1\begin{bmatrix}1&0\\-2&0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}+a_3\Big[$$

donde las matrices de la derecha generan $Im(T)$ y para extraer una base escalonamos la matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&0&-2&0\\0&0&1&1\\-1&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(4)}\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&0&-3&-3\\0&0&1&1\\-1&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{2^\circ+3(3^\circ)}\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\-1&0&-1&-3\end{pmatrix}\longrightarrow \text{Hay 3 vectores l.i}$$

1.0

Por ejemplo $\alpha\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\-2&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=0\\ 2\alpha-2\beta+\gamma=0\Rightarrow\gamma=0\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}$

Así $\alpha=\beta=\gamma=0\Rightarrow Im(T)=\Big\langle\underbrace{\left\{\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\-2&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}}_{\text{Base}}\Big\rangle$ y $\dim(Im(T))=3$

1.0

b) Consideramos $V=\langle\beta\rangle$, $W=\langle\gamma\rangle$ con $\beta=\{v_i\}_{i=1}^{m}$, $\gamma=\{w_j\}_{j=1}^{n}$

β, γ bases de V y W respectivamente

P.D.q.: $\mathrm{Dim}(V\times W)=m+n$

Sea $B=\{(v_i,0_W)\}_{i=1}^{m}\cup\{(0_V,w_j)\}_{j=1}^{n}$ y se probará que B es base de $V\times W$

∴ l.i. $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(v_i,0_W)+\sum_{j=1}^{n}\beta_j(0_V,w_j)=0_{V\times W}=(0_V,0_W)$

Por def $\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i,0_W\right)+\left(0_V,\sum_{j=1}^{n}\beta_j w_j\right)=(0_V,0_W)$

1.0

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i}_{\text{Base de }V}=0_V\ \wedge\ \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\beta_j w_j}_{\text{Base de }W}=0_W\Rightarrow\alpha_i=\beta_j=0\ \forall i,j$$

∴ Generador. Sea $(v,w)\in V\times W$: $v\in V\Rightarrow\exists\alpha_i\in\mathbb{R}$ t.q. $v=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i$

$w\in W\Rightarrow\exists\beta_j\in\mathbb{R}$ t.q. $w=\sum_{j=1}^{n}\beta_j w_j$

Así $(v,w)=(v,0_W)+(0_V,w)=\left(\sum^{m}\alpha_i v_i,0_W\right)+\left(0_V,\sum^{n}\beta_j w_j\right)$

1.0 $=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(v_i,0_W)+\sum_{j=1}^{n}\beta_j(0_V,w_j)\Rightarrow$ Es generador $\begin{cases}\text{Es base}\Rightarrow\\ \dim(V\times W)=m+n\end{cases}$

Pauta Problema 3

$V = \{A \in M_{33}(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ y $W = \{A \in V \mid$ La suma de cada fila de A es cero $\}$

i) Probar que W es s.e.v. de V

Sean $w_1, w_2 \in W$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Por dem. q' $(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \in W$

$$w_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \text{ con } \begin{matrix} a+b+c=0 \\ d+e=0 \\ f=0 \end{matrix} \quad \wedge \quad w_2 = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} \text{ con } \begin{matrix} a'+b'+c'=0 \\ d'+e'=0 \\ f'=0 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 a' & \lambda_1 b + \lambda_2 b' & \lambda_1 c + \lambda_2 c' \\ 0 & \lambda_1 d + \lambda_2 d' & \lambda_1 e + \lambda_2 e' \\ 0 & 0 & \lambda_1 f + \lambda_2 f' \end{pmatrix}$$

0.5

donde $\lambda_1 a + \lambda_2 a' + \lambda_1 b + \lambda_2 b' + \lambda_1 c + \lambda_2 c' = \lambda_1(a+b+c) + \lambda_2(a'+b'+c')$
$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

$\lambda_1 d + \lambda_2 d' + \lambda_1 e + \lambda_2 e' = \lambda_1(d+e) + \lambda_2(d'+e') = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

y $\lambda_1 f + \lambda_2 f' = \lambda_1 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

1.5 Sigue que $(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \in W$

ii) Probar que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es generador de W

En efecto, sea $w = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ que se escribe $w = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ 0 & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow w = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ 0 & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.0 Las matrices de la derecha generan W y son elementos de G por lo que G es también generador de V

iii) Base para W

0.5 Es inmediato comprobar que $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es l.d de las otras 3 matrices de G

Entonces se comprobara que estas matrices son l i y por lo tanto formaran una base de W

Sea $\alpha\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\\ -\alpha-\beta=0\\ \gamma=0\end{array} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

0.5 $\rightarrow$ Sigue que $W=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ y $Dim(W)=3$

iv) Probar que $V=W\oplus U$

$U=\{B\in M_{3\times3}(\mathbb{R})\,/\,B$ es diagonal$\}$, así si $B\in U\Rightarrow B=\begin{pmatrix}e&0&0\\0&f&0\\0&0&g\end{pmatrix}$

Claramente $\dim(U)=3$

0.5 $\rightarrow$ Así se tiene que $\dim(U)+\dim(W)=3+3=6=\dim(V)$

Ahora sea $B\in W\cap U\Rightarrow B\in W \wedge B\in U$

Entonces $B\in U\Rightarrow B=\begin{pmatrix}e&0&0\\0&f&0\\0&0&g\end{pmatrix} \wedge B\in W\Rightarrow e=f=g=0$ pues la suma de sus filas debe ser cero

Sigue que $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ única $\rightarrow W\cap U=\{0\}$

1.5 $\rightarrow$ Se concluye que $V=W\oplus U$.