Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento Ingeniería Matemática

Semestre primavera 2013

MA2002:CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
AUXILIAR # 1

Profesores María Clara Fittipaldi y Héctor Olivero Q.
Profesores Auxiliares: José Cereceda, Pablo Ugalde y Sebastian Reyes.

P1 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular a trozos $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior. Consideremos un campo escalar $\phi \in C^2$ en un dominio $U \supseteq \Omega \cup \partial\Omega$ y supongamos que $\Delta\phi = 0$ en Ω (ϕ armónica en Ω). Sea $p \subseteq \text{int}\,(\Omega)$ y deginamos la función $\psi\,(\vec{r}) = 1/\|\vec{r} - \vec{p}\|$

(a) Calcular $\nabla\psi\,(\vec{r})$ para $\vec{r} \neq \vec{p}$. Mostrar que $\Delta\psi = 0$ en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{p}\}$.

(b) Sea $B\,(\vec{p}, \delta) \subseteq \Omega$ esfera de centro $\vec{p}$ y radio $\delta > 0$ contenida en Ω. Probar que

$$\iint\limits_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\partial B(\vec{p},\delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}$$

P2 Sea F una función escalar suave en $\mathbb{R}^4$. Muestre el *teorema del transporte*:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} F\left(x(\vec{t}), t\right) dV = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} F\left(x(\vec{t}), t\right) dV + \int\limits_{\partial V(t)} F\vec{v} \cdot \vec{n} dS \tag{1}$$

Para esto utilice la formula de euler asociado a este cambio de variable $\frac{dJ}{dt} = J\,(\nabla \cdot \vec{v})$. De una interpretación física al teorema anterior.

P3 Considere el campo $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\theta\sin^3(\varphi)\,\hat{\theta}$ en coordenadas esféricas. Calcular $\nabla \cdot \vec{F}$ en todo punto donde F sea diferenciable. Sea $\Omega = B(0{,}1) \cap D$ con $D = \{(x, y, z) : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Defina $\Omega\,(\varepsilon) = \{(x, y, z) \in \Omega : x^2 + y^2 \geq \varepsilon\}$. Bosqueje $\Omega\,(\varepsilon)$ y calcule $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Omega(\varepsilon)} \nabla \cdot \vec{F} dV$