Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento Ingeniería Matemática

Semestre primavera 2013

MA2002:CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
AUXILIAR # 4 - PRE CONTROL

Profesores María Clara Fittipaldi y Héctor Olivero Q.
Profesores Auxiliares: José Cereceda, Pablo Ugalde y Sebastian Reyes.

Resumen.

Integral de superficie de un campo escalar
S una superficie suave representada por $\vec{r}: T \to \mathbb{R}^3$, f campo escalar y continua en S

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_T f(\vec{r}(u,v)) \cdot \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\| d(u,v)$$

Integral de superficie de un campo vectorial
$\vec{F}$ un campo vectorial continuo en S superficie orientable con orientación $\hat{n}$. Entonces la integral de $\vec{F}$ en S es la integral de superficie del campo escalar $\vec{F} \cdot \hat{n}$, i.e.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_T \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\,d(u,v)$$

Teorema de la divergencia (o de Gauss)
D una región acotada en $\mathbb{R}^3$ limitada por una superficie suave y cerrada S $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en D entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) d(x,y,z)$$

Teorema de Stokes
S una superficie suave seccionalmente suave orientable y acotada, con borde consistente de curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k$, $\vec{F}$ campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ entonces:

$$\iint_S \left(\operatorname{rot} \vec{F}\right) \cdot \hat{n} dS = \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathcal{C}_|} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

P1 En todo lo que sigue $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado de frontera $\partial\Omega$.

(a) Muestre la siguiente identidad de Green: dados $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ se tiene

$$\iint_{\partial\Omega} g \nabla f \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (g \triangle f + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$$

(b) Considere la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde:

$$\begin{cases} \triangle u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Se quiere probar que si esta ecuación admite solución ésta es única

(c) Ahora considere la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde:

$$\begin{cases} \triangle u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \hat{n}} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

¿Qué ocurre en este caso?

P2 Una esfera de radio $R > 0$ posee un núcleo de radio $a < R$ el cual se encuentra a una temperatura T_a mayor que la temperatura T_R de la superficie. Suponemos que la distribución de temperatura u entre el núcleo y la superficie tiene simetría radial, vale decir $u = u(r,t)$.

Suponga que u satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,t) = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}(r,t)\right)$$

a) Utilizando el cambio de escala $u = \frac{1}{r}v$ compruebe que la función v satisface

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r,t) = k\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,t)$$

b) Deduzca una expresión analítica para la distribuión de temperatura en régimen estacionario en terminos de r, k, a, R, T_a, T_R. Grafique la solución $u(r)$.

P3 (a) Sabemos que si $\vec{H}$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ entonces $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right) = 0$. Demuestre que la recíproca también es cierta; i.e. si $\vec{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, entonces existe un campo $\vec{H}$ de clase $\mathcal{C}^2$, llamado potencial vectorial de $\vec{F}$, tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{H}$

Ind: Considere el campo $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ definido por $H_1 = \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt$, $H_2 = -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt$ y $H_3 = 0$.

(b) Sea ahora $\vec{F}$ un campo de vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = \vec{H} + \vec{G}$ con $\vec{H}, \vec{G}$ campos vectoriales de clase $\mathcal{C}^2$ que satistacen $\operatorname{div}\vec{H} = 0, \operatorname{rot}\vec{G} = 0$. Demuestre que existen $\phi, \vec{U}$ Campos escalar y vectorial respectivamente tales que $\operatorname{rot}\vec{U} = \vec{H}$ y $\nabla\phi = \vec{G}$, y que satisfacen $\Delta\phi = \operatorname{div}\vec{F}$ y $\nabla\left(\operatorname{div}\vec{U}\right) - \Delta\vec{U} = \operatorname{rot}\vec{F}$ donde $\Delta\vec{U} = (\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3)$ si $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$.