Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor Mauricio Duarte.
P. Aux. Rodrigo Bravo Moreno
Semestre Primavera, 2013

AUXILIAR 5: VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Problema 1:

Una masa radioactiva emite partículas, se revisa en cierto instante el conteo de particulas emitidas, y se sabe que en ese instante la cantidad de masa radioactiva emitida sigue una distribución de Poisson a tasa media λ partículas. El contador falla con probabilidad $\frac{9}{10}$ en la identificación de cada partícula, suponiendo que no hay interacción entre las partículas. Encuentre la distribución de Y el numero de partículas registradas por el contador, cual es el parámetro?.

Problema 2:

Un fabricante produce cierto tipo de aceite lubricante que pierde alguno de sus atributos especiales si no se usa dentro de cierto período de tiempo. Sea X el número de unidades de aceite pedidas al fabricante durante cada año (una unidad equivale a 1000 galones). Supongamos que $X \sim U[2,4]$ y que por cada unidad vendida se obtiene una utilidad de 300, mientras que cada unidad no vendida (durante un año determinado) produce una pérdida de 100. El fabricante debe decidir pocos meses antes del comienzo de cada año cuanto producirá. Llamemos N a la cantidad producida. ¿Qué valor de N maximiza la utilidad esperada?

Problema 3:

Sea $X \sim exp(\lambda)$, es decir,

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \leq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1. Calcule $\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k)$, con $k \in \mathbb{N}$.
2. Pruebe que X posee la propiedad de pérdida de memoria, es decir,
$$(\forall t, s > 0) \quad \mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$
3. Sean $X_1 \sim exp(\lambda_1)$ y $X_2 \sim exp(\lambda_2)$ independientes. Sea $Y = \min\{X_1, X_2\}$. Calcule la función de densidad de Y.
4. Sean $X_1 \sim exp(\lambda_1)$ y $X_2 \sim exp(\lambda_2)$ independientes. Muestre que
$$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$
5. Sea $Z \sim U([0,1])$. ¿Para qué función g se tiene que $Y = g(Z) \sim exp(\lambda)$?

Problema 4:

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, es decir,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in \mathbb{R}.$$

1. Muestre que $\mathbb{P}(X > \mu + a) = \mathbb{P}(X < \mu - a)$.
2. Muestre que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(iii) Sea $Y = e^Z$. Encuentre la función de densidad de Y[1].

[1] Se dice que Y posee distribución Log-Normal.