Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3802 Teoría de la Medida
9 de noviembre de 2013

Control 2

Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliares: Francisco Arana, Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez.

P1. Considere el espacio de medida $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$, donde dx es la medida de Lebesgue. Sea $1 \leq p < \infty$. Para $f \in L^p$, se dice que f es **débilmente derivable** en L^p si existe una función $h \in L^p$ tal que para toda función $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ con $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, se tiene que

$$\int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx = -\int_0^1 h(x)\varphi(x)dx$$

En este caso diremos que la derivada débil en L^p de f es h y lo denotaremos por $h = Df$.

(a) **[1 pto.]** Pruebe que si $f \in L^p$ es débilmente derivable en L^p, entonces su derivada débil es única.
Indicación. Pruebe que si g_1, g_2 son dos funciones integrables no negativas tales que para todo $0 \leq a \leq b \leq 1$ se tiene que $\int_a^b g_1(x)dx = \int_a^b g_2(x)dx$, entonces $g_1 = g_2$ c.t.p..
Solución. Probemos primero la indicación. Tomemos un boreliano A y $\varepsilon > 0$.
Por la regularidad de la medida de Lebesgue existe un abierto $U_\varepsilon \subseteq [0,1]$ tal que $A \subseteq U$ y la medida de $U_\varepsilon \setminus A$ es menor que ε. Además, como todo abierto en $\mathbb{R}$ se puede escribir como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos, tenemos que $U_\varepsilon = \bigcup_{n \in N} I_n^\varepsilon$ con $|N| \leq |\mathbb{N}|$. Del teorema de convergencia dominada,

$$\int_{U_\varepsilon} g_1(x)dx = \sum_{n \in N} \int_{I_n^\varepsilon} g_1(x)dx, \quad \int_{U_\varepsilon} g_2(x)dx = \sum_{n \in N} \int_{I_n^\varepsilon} g_2(x)dx.$$

Luego, obtenemos que

$$\int_{U_\varepsilon} g_1(x)dx = \int_{U_\varepsilon} g_2(x)dx.$$

porque las integrales de g_1 y g_2 coinciden en cada I_n^ε. Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_A g_1(x)dx &= \int_{U_\varepsilon} g_1(x)dx + \int_{A \setminus U_\varepsilon} g_1(x)dx \\ &= \int_{U_\varepsilon} g_2(x)dx + \int_{A \setminus U_\varepsilon} g_1(x)dx \\ &= \int_A g_2(x)dx + \int_{A \setminus U_\varepsilon} g_1(x)dx - \int_{A \setminus U_\varepsilon} g_2(x)dx.\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, se concluye que $\int_A g_1(x)dx = \int_A g_2(x)dx$ ($g_1, g_2 \in L^1$ porque $L^p \subseteq L^1$ en medida finita), lo que prueba que $g_1 = g_2$ c.t.p..
Supongamos ahora que $g_1, g_2 \in L^p$ son derivadas débiles de $f \in L^p$. Se tiene que

$$\int_0^1 g_1(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx = \int_0^1 g_2(x)\varphi(x)dx$$

para toda función $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Dados $0 \leq a \leq b \leq 1$ y $\varepsilon > 0$, tomemos $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tal que φ_ε es igual a $\mathbb{1}_{[a,b]}$ salvo en un conjunto A_ε de medida menor que ε. Así,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_1(x)\varphi(x)dx &= \int_0^1 g_1(x)(\mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \varphi(x) - \mathbb{1}_{[a,b]}(x))dx \\ &= \int_a^b g_1(x)dx + \int_{A_\varepsilon} g_1(x)(\varphi(x) - \mathbb{1}_{[a,b]}(x))dx \\ &= \int_a^b g_2(x)dx + \int_{A_\varepsilon} g_2(x)(\varphi(x) - \mathbb{1}_{[a,b]}(x))dx,\end{aligned}$$

como $g_1, g_2 \in L^p \subseteq L^1$ y $\varphi - \mathbb{1}_{[a,b]}$ es acotada, concluimos que $\int_a^b g_1(x)dx = \int_a^b g_2(x)dx$ al tomar $\varepsilon \to 0$.

(b) **[1 pto.]** Pruebe que si $R, S\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ son dos funciones absolutamente continuas, entonces satisfacen la fórmula de integración por partes, esto es,

$$\int_0^1 \dot{R}(x)S(x)dx = R(1)S(1) - R(0)S(0) - \int_0^1 R(x)\dot{S}(x)dx.$$

Indicación. Pruebe por definición que el producto $R \cdot S$ es una función absolutamente continua.

Solución. Nuevamente, probemos primero la indicación. Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que para $x, y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}|R(x)S(x) - R(y)S(y)| &= |R(x)S(x) - R(x)S(y) + R(x)S(y) - R(y)S(y)| \\ &\leq |R(x)||S(x) - S(y)| + |S(y)||R(x) - R(y)| \\ &\leq \|R\|_\infty |S(x) - S(y)| + \|S\|_\infty |R(x) - R(y)|.\end{aligned}$$

Luego, si $\{(a_k, b_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia de intervalos disjuntos, como R y S son absolutamente continuas existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| < \delta \implies \sum_{k\in\mathbb{N}} |R(b_k) - R(a_k)| < \frac{\varepsilon}{M} \wedge \sum_{k\in\mathbb{N}} |S(b_k) - S(a_k)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

con $M = \|R\|_\infty + \|S\|_\infty < \infty$. Concluimos que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} |R(b_k)S(b_k) - R(a_k)S(a_k)| &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} (\|R\|_\infty |S(b_k) - S(a_k)| + \|S\|_\infty |R(b_k) - R(a_k)|) \\ &< \frac{\varepsilon}{M}(\|R\|_\infty + \|S\|_\infty) = \varepsilon,\end{aligned}$$

por lo que $R \cdot S$ es absolutamente continua. Luego,

$$R(1)S(1) = R(0)S(0) + \int_0^1 (R \cdot S)'(x)dx.$$

Se tiene que existe un conjunto A de medida 1 en el cual R, S y $R \cdot S$ son derivables. Luego, para cualquier $x \in A$ se tiene que $(R \cdot S)'(x) = \dot{R}(x)S(x) + S(x)\dot{R}(x)$. Como

$$\int_0^1 (R \cdot S)'(x)dx = \int_A (R \cdot S)'(x)$$

porque $[0,1] \setminus A$ tiene medida nula, obtenemos que

$$R(1)S(1) = R(0)S(0) + \int_A (\dot{R}(x)S(x) + R(x)\dot{S}(x))dx = R(0)S(0) + \int_0^1 (\dot{R}(x)S(x) + R(x)\dot{S}(x))dx.$$

Reordenando los términos se obtiene la igualdad deseada.

(c) **[1 pto.]** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Pruebe que la derivada usual y la derivada débil en L^1 de f coinciden, esto es, $Df = \dot{f}$ c.t.p..

Solución. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Usando la parte anterior,

$$\int_0^1 \dot{f}(x)\varphi(x)dx = f(1)\varphi(1) - f(0)\varphi(0) - \int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx.$$

Como además $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, esto se reduce a

$$\int_0^1 \dot{f}(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx.$$

Por último, como f es absolutamente continua se tiene que $|f|$ también lo es y que su derivada es $|\dot{f}|\operatorname{sgn}(f)$ c.t.p.. Luego,

$$\int_0^1 |\dot{f}(x)|dx \leq |f(1)| + |f(0)| < \infty$$

y se concluye que Df existe en L^1 y es igual a $\dot{f}$ por definición y unicidad c.t.p. de la derivada débil.

(d) **[0,5 pts.]** Pruebe que la derivada débil es lineal, esto es, que para $f, g \in L^p$ débilmente derivables y para $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $f + \lambda g$ es débilmente derivable y $D(f + \lambda g) = Df + \lambda Dg$.

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f+\lambda g)(x)\dot{\varphi}(x)dx &= \int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx + \lambda \int_0^1 g(x)\dot{\varphi}(x)dx \\
&= -\int_0^1 Df(x)\varphi(x)dx - \lambda \int_0^1 Dg(x)\varphi(x)dx \\
&= -\int_0^1 (Df + \lambda Dg)(x)\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$, por lo que $D(f+\lambda g)$ existe y es igual a $Df + \lambda Dg$, por la definición y unicidad de la derivada débil.

(e) **[0,5 pts.]** Pruebe que $D\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = 0$ c.t.p..

Solución. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Notemos que

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\dot{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \dot{\varphi}(x)dx = 0 = -\int_0^1 0 \cdot \varphi(x)dx.$$

Como $0 \in L^p$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \in L^p$ (para cualquier $1 \leq p < \infty$), obtenemos, por definición y unicidad de la derivada débil, que $D\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = 0$ c.t.p..

(f) **[2 pts.]** Sea $f \in \mathcal{C}([0,1])$ una función tal que $f(0) = f(1) = 0$. Supongamos que $1 < p < \infty$ y que q es su índice conjugado, esto es $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suponga que existe una constante $C < \infty$ tal que

$$\left|\int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx\right| \leq C||\varphi||_q \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

Pruebe que f es débilmente derivable en L^p.

Indicación. Defina

$$\ell(\varphi) = \int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx.$$

Solución. Notemos que la hipótesis implica que ℓ es un funcional lineal continuo de $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_q)$ a $\mathbb{R}$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $\bar{\ell}\colon L^q \to \mathbb{R}$ funcional lineal continuo tal que $\bar{\ell}|_{\mathcal{C}^1([0,1])} = \ell$. Como $1 < p < \infty$, por el teorema de dualidad de L^p tenemos que existe $h \in L^p$ tal que

$$\bar{\ell}(g) = \int_0^1 h(x)g(x)$$

para toda $g \in L^q$. En particular, si $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$:

$$\int_0^1 f(x)\dot{\varphi}(x)dx = \ell(\varphi) = \bar{\ell}(\varphi) = \int_0^1 h(x)\varphi(x).$$

Como $-h \in L^p$, por definición de derivada débil vemos que Df existe y es igual a $-h$.