# Complemento 1: Definiciones Básicas de Grafos no dirigidos

MA4701: Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto.

19/08/2013

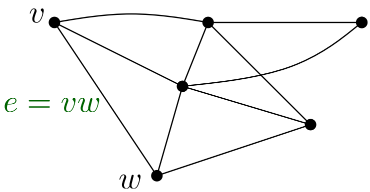
# Grafos: Dos definiciones

## Grafo Simple

Un grafo simple $G$ es un par $(V, E)$ donde

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}.$$

- Los $v \in V$ se denominan vértices.
- Los $e \in E$ se denominan aristas.
- Denotamos $e = \{u, v\}$ como $e = uv = vu$.
- Los vértices $u$ y $v$ de una arista $e$ se denominan extremos de $e$.

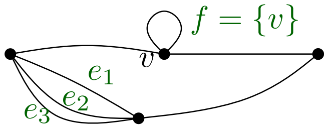


# Grafos: Dos definiciones

## (Muti)Grafo

Un grafo $G$ es un par $(V, E)$, donde a cada arista $e \in E$ se le asigna un conjunto de extremos que puede ser $\{u, v\} \subseteq \binom{V}{2}$ o un singleton $\{v\}$, con $v \in V$.

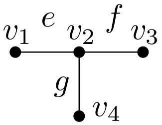
- Aristas de un sólo extremo: búcles o loops.
- Aristas con extremos iguales: paralelas.
- Abusando notación escribimos $e = \{u\}$ para el búcle de extremo $u$ y $e = uv$ para una arista de extremos $u$ y $v$.
- Un grafo sin búcles ni aristas paralelas es un grafo simple.



# Notaciones básicas

Dado un grafo $G$.

- Una arista $e$ es incidente a un vértice $v$ si $v$ es extremo de $e$.
- Dos aristas son adyacentes si son incidentes a un vértice en común.
- Dos vértices $u$ y $v$ son adyacentes o vecinos si existe una arista de extremos $u$ y $v$.
- El órden de un grafo es $|V|$ y solemos denotar $n = |V|$.
- El tamaño de un grafo es $|E|$ y solemos denotar $m = |E|$.



# Convenciones

- A no ser que se diga lo contrario cuando decimos “grafo” nos referimos a un grafo simple.
- Si $G = (V, E)$ escribimos $V = V(G)$ y $E = E(G)$. También decimos que $G$ es un grafo en $V$ con aristas $E$.
- Además asumiremos que $|V|, |E| < \infty$.

# Ejemplos simples de grafos

- El grafo trivial $(\emptyset, \emptyset)$.
- El grafo completo

$$K_n = \left([n], \binom{[n]}{2}\right) = (\{1, \ldots, n\}, \{ij \colon i < j\}).$$

- El complemento del grafo completo

$$\overline{K_n} = ([n], \emptyset)\,.$$

- Dada una relación simétrica $\sim$ en $V$, el grafo

$$G_\sim = (V, \{uv \colon u \neq v, u \sim v\}.$$

# Conjuntos notables de un grafo simple $G = (V, E)$.

- Dados $U, W \subseteq V$, $U \cap W = \emptyset$, $F \subseteq E$,

$$F[U, W] = \{e = uv \in F \colon u \in U, v \in W\}.$$

# Conjuntos notables de un grafo simple $G = (V, E)$.

- Dados $U, W \subseteq V$, $U \cap W = \emptyset$, $F \subseteq E$,

$$F[U, W] = \{e = uv \in F \colon u \in U, v \in W\}.$$

- Si $v \in V$, $U \subseteq V$ y $F \subseteq E$ definimos

$$\begin{aligned}
\delta_F(v) &= \{e \in F \colon e \text{ es incidente a } v\} = F[\{v\}, V \setminus \{v\}]. \\
\delta_F(U) &= \{e \in F \colon e \text{ es incidente a algún } v \in U \text{ y a algún } v \notin U\} \\
&= F[U, V \setminus U]. \\
N_F(v) &= \{w \in V \setminus \{v\} \colon \exists e \in F, e = vw\}. \\
N_F(U) &= \{w \in V \setminus U \colon \exists v \in U, \exists e \in F, e = vw\}.
\end{aligned}$$

Cuando $F = E$ omitimos el subíndice.

# Conjuntos notables de un grafo simple $G = (V, E)$.

- Dados $U, W \subseteq V$, $U \cap W = \emptyset$, $F \subseteq E$,

$$F[U, W] = \{e = uv \in F \colon u \in U, v \in W\}.$$

- Si $v \in V$, $U \subseteq V$ y $F \subseteq E$ definimos

$$\begin{aligned}
\delta_F(v) &= \{e \in F \colon e \text{ es incidente a } v\} = F[\{v\}, V \setminus \{v\}]. \\
\delta_F(U) &= \{e \in F \colon e \text{ es incidente a algún } v \in U \text{ y a algún } v \notin U\} \\
&= F[U, V \setminus U]. \\
N_F(v) &= \{w \in V \setminus \{v\} \colon \exists e \in F, e = vw\}. \\
N_F(U) &= \{w \in V \setminus U \colon \exists v \in U, \exists e \in F, e = vw\}.
\end{aligned}$$

  Cuando $F = E$ omitimos el subíndice.
- Los conjuntos $\delta(v)$ y $\delta(U)$ se llaman los cortes asociados a $v$ y $U$.
- Los conjuntos $N(v)$ y $N(U)$ son los vecinos de $v$ y $U$.
- La cantidad $d(v) = |\delta(v)| = |N(v)|$ es el grado de $v$.

# Subgrafos.

- Un grafo $G' = (V', E')$ es subgrafo de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$;
  en tal caso escribimos $G' \subseteq G$.
  OBS: Como $G'$ es grafo, se deduce también que $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$.
- Dado $U \subseteq V$; el subgrafo de $G$ inducido por $U$ es el grafo

$$G[U] = (U, \{e = uv \in E \colon u, v \in U\}) = \left(U, E \cap \binom{U}{2}\right).$$

- Dado $F \subseteq E$, el grafo obtenido al borrar $F$ de $G$ es

$$G \setminus F = (V, E \setminus F).$$

- Dado $U \subseteq V$, el grafo obtenido al borrar $U$ de $V$ es

$$G \setminus U = G[V \setminus U].$$

# Paseos, Caminos y ciclos

- Un paseo es una secuencia

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \cdots e_k v_k$$

  donde $v_i \in V, e_i \in E, e_i = v_{i-1}v_i$.
- El largo del paseo es el número de aristas del mismo.
- Un paseo es arista-simple si todas las aristas son distintas.
- Si todos los $v_i$ son distintos, $P$ se llama camino entre $v_0$ y $v_k$. También llamamos camino al grafo $(\{v_i\}_{i=0}^k, \{e_i\}_{i=1}^k)$. Abusando notación, el conjunto $\{e_i\}_{i=1}^k$ también se llama camino.
- Si todos los $v_i$ son distintos, excepto $v_0 = v_k$, $P$ se llama ciclo. También llamamos ciclo al grafo $(\{v_i\}_{i=0}^{k-1}, \{e_i\}_{i=1}^k)$. Abusando notación, el conjunto $\{e_i\}_{i=1}^k$ también se llama ciclo.

# Conectividad y Generación

- Un grafo $G = (V, E)$ se dice conexo si para cada $u, v \in V$ existe un paseo entre $u$ y $v$ (equivalentemente, existe un camino).
- Una componente conexa de $G$ es un conjunto maximal de vértices $W$ tal que $G[W]$ es conexo.
- Sean $F \subseteq E$ y $U \subseteq V$. Decimos que $F$ genera $U$ si para todo vértice $u \in U$, existe una arista $e \in F$ incidente a $u$.

  También decimos que un grafo $G'$ genera $U$ si $E(G')$ genera $U$. Un subgrafo $G' \subseteq G$ es generador si $G'$ genera $V(G)$.

# Árboles

## Bosque

Un bosque es un grafo sin ciclos.

## Árbol

Un árbol es un bosque conexo.