MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°3

5 de septiembre de 2013

Dado E finito e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$, decimos que $(E, \mathcal{I})$ es **par hereditario** si no es vacío y cada vez que $X \subseteq Y \in \mathcal{I}$, $X \in \mathcal{I}$. Decimos que un par hereditario es **matroide** si satisface el **axioma de aumento**: si X, $Y \in \mathcal{I}$ y $|X| < |Y|$, entonces existe $e \in Y \setminus X$ tal que $X + e \in \mathcal{I}$. Este axioma equivale al **axioma de aumento débil**: si $X, Y \in \mathcal{I}$, y $|X \setminus Y| = 1$, $|Y \setminus X| = 2$, entonces existe y in $Y \setminus X$ con $X + y \in \mathcal{I}$. Dada una matroide, el conjunto de **circuitos** $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ se define como $\mathcal{C} = \{X \subseteq E : X \notin \mathcal{I}, \forall e \in X, X - e \in \mathcal{I}\}$. Un par hereditario es matroide si y sólo si para cada función de pesos asociada, el algoritmo glotón entrega un conjunto independiente de peso máximo.

P1) Sea n entero positivo. Tenemos n tareas que realizar y resolver cada una de ellas requiere un día entero de trabajo, dentro de un total de n días disponibles en total. Suponemos que el conjunto de las tareas está dado por $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Para cada $i \in [n]$, cada tarea i tiene asociado una *fecha límite* $D(i) \in \{1, \ldots, n\}$ y una *penalización* $P(i) \geq 0$. El *problema de fijación del horario* consiste en encontrar una permutación $\pi \in \Sigma_n$ tal que la *penalización total* dada por

$$c(\pi) := \sum_{i:\, \pi(i) > D(i)} P(i)$$

sea mínima.

a) Sea $X \subseteq [n]$ un subconjunto de las tareas. Decimos que X es *realista* si es que existe una programación tal que toda tarea en X se puede realizar antes de su fecha tope. Muestre que X es realista si y sólo si $|\{i \in X \ : \ D(i) \leq t\}| \leq t$ para todo t.

b) Muestre que el problema se puede replantear como encontrar un conjunto realista X tal que $\sum_{i \in X} P_i$ sea máximo.

c) Sea $\mathcal{I} = \{X \subseteq [n] \ : \ X \text{ realista }\}$. Muestre que $([n], \mathcal{I})$ es una matroide.

d) Encuentre un algoritmo glotón que resuelva el problema de fijación del horario. Diseñe una implementación que funcione en orden $O(n^2)$.

P2) Sea E finito, y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Decimos que $\mathcal{C}$ cumple los **axiomas de circuito** si

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$,

(C2) $X, Y \in \mathcal{C}$ y $X \subseteq Y$ implica $X = Y$,

(C3) para todo X, $Y \in \mathcal{C}$ tales que $X \neq Y$ y existe $e \in X \cap Y$; existe $Z \in \mathcal{C}$ tal que $Z \subseteq (X \cup Y) - e$.

a) Muestre que si $(E, \mathcal{I})$ es matroide, el conjunto de circuitos cumple los axiomas de circuito.

b) Muestre que si $\mathcal{C}$ cumple los axiomas de circuito y definimos

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : X \text{ no contiene ningún conjunto de } \mathcal{C}\ \}$$

entonces $(E, \mathcal{I})$ es una matroide.

P3) Sea E finito no vacío. Una familia de conjuntos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ se dice *familia laminar* si para todo $A, B \in \mathcal{F}$, se tiene que $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ o bien $A \cap B = \emptyset$. Considere E con una familia laminar asociada $\mathcal{F}$ y una función $k : \mathcal{F} \to \mathbf{N}$ a valores naturales. Definimos

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \ : \ |A \cap X| \leq k(A),\ \forall A \in \mathcal{F}\}$$

Muestre que $(E, \mathcal{I})$ es una matroide.

P4) Sea E finito no vacío e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que $(E, \mathcal{I})$ es un par hereditario. Muestre que $(E, \mathcal{I})$ es matroide si y sólo si para cada X, $Y \in \mathcal{I}$, si existe $y \in Y \setminus X$, entonces existe $Z \subseteq X \setminus Y$ con $|Z| \leq 1$ tal que $X + y - Z$ está en $\mathcal{I}$.