MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto

Problemas Controlables (parte 1).

Problema 1

a) Sea $G = (V, E)$ un bosque. Definimos

- h como el número de hojas de G.
- a como el número de vértices aislados de G.
- c como el número de componentes conexas de G.

Demuestre que $h \geq 2(c - a)$.

b) Sea G un grafo conexo y $v \in V(G)$. Sea T_1 un árbol BFS de G partiendo de v y sea T_2 un árbol DFS de G partiendo de v. Demuestre o refute: $T_1 = T_2$ (como grafos) si y solo si $G = T_1 = T_2$.

Problema 2

Dado un grafo $G = (V, E)$ conexo y una funcion de peso $w : E \to \mathbb{R}$ que puede tomar valores negativos. Considere el problema de encontrar un subgrafo $G' \subseteq G$ conexo y generador de peso mínimo.

a) Muestre con un ejemplo que si T es árbol generador de peso mínimo de G entonces T no es necesariamente óptimo para el problema considerado.

b) Diseñe un algoritmo que resuelva el problema. Demuestre que el algoritmo es correcto y evalúe su complejidad en función de n y m. Éste debe ser fuertemente polinomial. ¿Puede lograr $O(n^2)$?

Problema 3

Sea $G = (V, E)$ conexo y $w : E \to \mathbb{R}^+$ estrictamente positiva. Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de los árboles generadores de G.

a) Demuestre que $T \in \mathcal{X}$ minimiza $w(E(T)) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$ si y solo si minimiza $\prod_{e \in E(T)} w(e)$.

b) Demuestre o dé un contraejemplo para cada aseveración.
$\mathcal{X}$ tiene un único mínimo si:

(1) Todos los pesos de E son distintos.

(2) Para cada ciclo $C \subseteq E$, todos los pesos de C son distintos.

(3) Para cada corte $\delta(U)$, con $\emptyset \subsetneq U \subsetneq V$, todos los pesos de $\delta(U)$ son distintos.

(4) Para cada $v \in V$, todos los pesos de $\delta(v)$ son distintos.

Problema 4

Sea $G = (V, E)$ un grafo no necesariamente simple. La matroide gráfica asociada a G es

$$M = (E, \{F \subseteq E : F \text{ es acíclico}\}).$$

(a) Demuestre con propiedades de grafos que la matroide grafica de cualquier grafo (no necesariamente simple ni conexo) es efectivamente una matroide, demostrando que satisface el axioma de aumento debil.
Observación: los loops se consideran ciclos de una arista, y dos aristas paralelas también se consideran ciclos.

(b) Demuestre que toda matroide grafica es regular (Indicación: probar primero que es binaria).

Recuerdo e indicaciones para el Problema 4:

- Dos matroides $M = (E, \mathcal{I})$ y $M' = (E', \mathcal{I}')$ se dicen isomorfas si existe una función biyectiva $\phi\colon E \to E'$ tal que:
$$(\forall F \subseteq E)\ F \in \mathcal{I} \iff \phi(F) \in \mathcal{I}'.$$
- Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ con $\mathbb{F}$ cuerpo. La *matroide de columnas asociada a* A, también llamada *matroide representada por* A es la matroide cuyos elementos son las columnas de A y cuyos conjuntos independientes son aquellos conjuntos de columnas que son línealmente independientes en el espacio vectorial $\mathbb{F}^n$.
- Una matroide M se dice representable en $\mathbb{F}$ si existe una matriz A a coeficientes en $\mathbb{F}$ tal que la M es isomorfa a la matroide representada por A.
- Una matroide se dice *binaria*, si es representable en el cuerpo $GF(2)$, se dice *ternaria* si es representable en $GF(3)$ y regular si es representable en $\mathbb{F}$ para todo cuerpo $\mathbb{F}$.
- Para probar la parte binaria, use las matrices más simples que conozca cuyas columnas correspondan a las aristas. Recuerde que un conjunto de columnas es línealmente independiente en GF(2) si y solo ningún subconjunto de ellas suma 0. (Esto sale del hecho que los coeficientes en una combinación lineal, al ser elementos de GF(2), pueden solo ser 1 o 0).
- Para probar el caso regular, use el mismo “tipo” de matrices que antes. Recuerde que en GF(2) y en cualquier cuerpo de característica 2, se tiene que $1 = -1$, pero que esto no ocurre en cuerpos generales. (También le puede ser útil recordar que el rango por columnas de una matriz es igual al rango por filas).

Problema 5

Para una matroide $M = (E, \mathcal{I})$ definimos la función $\text{span}\colon 2^E \to 2^E$ donde $\text{span}(X)$ es el conjunto maximal $X \subseteq \text{span}(X) \subseteq E$ tal que $r(X) = r(\text{span}(X))$.

(a) Demuestre que la función span está bien definida. En otras palabras, muestre que si X_1 y X_2 son tales que $X \subseteq X_i \subseteq E$ con $r(X) = r(X_i)$, entonces también se tiene que $X \subseteq X_1 \cup X_2 \subseteq E$ y $r(X_1 \cup X_2) = r(X)$.

(b) Demuestre que la definición de span anterior es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:

$$x \in \text{span}(X) \iff x \in X \text{ o } X + x \text{ contiene un circuito que contenga a } x.$$
$$x \in \text{span}(X) \iff r(X + x) = r(X).$$

A continuación demostraremos que la función de span de hecho define a una matroide. Para esto procederemos como sigue. Sea E un conjunto finito. Definimos los siguientes axiomas para una función $\text{sp}\colon 2^E \to 2^E$.

(S1) $\forall S \subseteq E$, entonces $S \subseteq \text{sp}(S) \subseteq E$.
(S2) $\forall S \subseteq E$, $\text{sp}(\text{sp}(S)) = \text{sp}(S)$.
(S3) Si $S \subseteq T$ entonces $\text{sp}(S) \subseteq \text{sp}(T)$.
(S4) Si $x \notin \text{sp}(S)$ pero $x \in \text{sp}(S + y)$ entonces $y \in \text{sp}(S + x)$.

(c) Demuestre que la función span asociada a una matroide $M = (E, \mathcal{I})$ satisface los axiomas $(S1)$–$(S4)$.

(d) Demuestre que si sp es una función que satisface $(S1)$–$(S4)$ entonces la tupla

$$M = (E, \{I \subseteq E\colon \forall x \in I, x \notin \text{sp}(I - x)\})$$

es una matroide y que “sp” corresponde a la función de span asociada a M.

Problema 6 Un grafo plano es un multigrafo $G = (V, E)$ que está "dibujado" en el plano de modo que sus vértices son representados por puntos distintos de $\mathbb{R}^2$ y sus aristas (incluidas los loops) son representadas por curvas contínuas, de largo positivo pero finito (que llamamos líneas) y que no se cruzan a sí mismas ni a otras aristas. El dibujo divide al plano en distintas regiones abiertas. Éstas regiones se llaman las *caras* de G.

A cada grafo plano G se le puede asociar un grafo plano dual G^* del siguiente modo: Elegir un punto de cada cara de G, dichos puntos son los vértices de G^*. La colección de vértices de G^* se denota por V^*. Para cada arista e de G, dibujar una línea e^* conectando los vértices de G^* de ambos lados de e de modo que no haya cruces entre las nuevas líneas y que la única línea que cruza a e sea e^*. La colección $E^* = \{e^* : e \in E\}$ corresponde a las aristas de G^* (es posible que e tenga a la misma cara en ambos lados, en dicho caso e^* es una línea cerrada y corresponde a un loop en G^*). La siguiente figura representa un grafo plano G (en líneas gruesas) y su dual G^* en líneas delgadas.

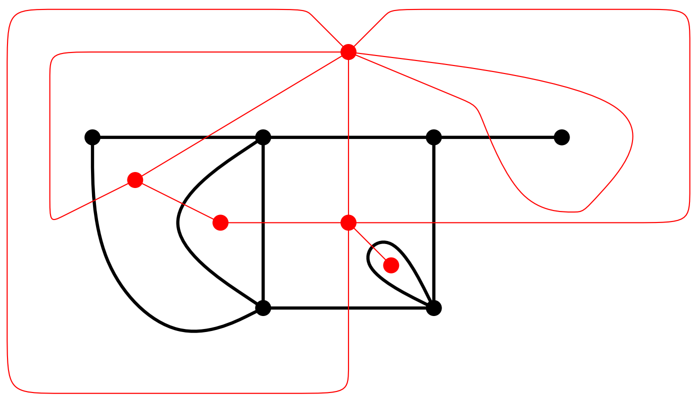

Figura 1: Un grafo plano G con 6 vértices, 9 aristas y 5 caras. Su dual plano G^* tiene 5 vértices, 9 aristas y 6 caras.

Sea G un grafo plano arbitrario y G^* su dual plano. Suponga que, como en la figura, tanto G como G^* son conexos. El siguiente resultado es cierto incluso sin este supuesto, pero la demostración es ligeramente más complicada:

Sean M_1 y M_2 las matroides gráfica asociadas a G y G^* respectivamente. Demuestre que M_2 es la matroide dual de M_1. (En rigor $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (E^*, \mathcal{I}_2)$ son matroides con distintos conjuntos de referencia, pero podemos considerarlas como matroides sobre el mismo conjunto mediante la biyección entre E y E^* dada por $e \to e^*$).