MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Felipe Contreras y Patricio Foncea
Fecha: 6 de Septiembre de 2013.

Cátedra 6

Comenzaremos recordando la definición de rango en un matroide, dada la clase anterior:

Definición. Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide. Definimos rango $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ como $r(X) = \max\{|I| : I \in \mathcal{I}, I \subseteq X\}$.

1. Operaciones en matroides

1.1. Suma directa de matroides

Sean $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1), M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ matroides con $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Definición. $M_1 \oplus M_2 = (E_1 \cup E_2, \{I_1 \cup I_2 : I_i \in \mathcal{I}_i\})$.

Teorema 1. *$M_1 \oplus M_2$ es matroide.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_i \in \mathcal{I}_i\}$, $Y = Y_1 \cup Y_2$ y $X = X_1 \cup X_2$, con $|Y| > |X|$. Ya que E_1 y E_2 son disjuntos, necesariamente se tiene que $|Y_1| > |X_1|$ ó $|Y_2| > |X_2|$. Sin pérdida de generalidad, asumamos se cumple lo primero. Como $\mathcal{I}_1$ es matroide, $\exists z \in Y_1 \setminus X_1$ tal que $X + z \in \mathcal{I}_1$. De esta forma, $z \in Y \setminus X$ y $X + z = (X_1 + z) \cup X_2 \in \mathcal{I}$. □

Ejemplo. Sean $M_i = U(E_i, k)$, donde $U(E_i, k_i)$ es la matroide uniforme con conjunto de referencia E_i y $I \subseteq E_i$ es independiente ssi $|I| \leq k$, con los E_i disjuntos.
Definimos la *matroide de partición* $M = \bigoplus M_i$ asociada a $(\bigcup E_i, \{k_1 \ldots, k_n\})$, donde $I \in \mathcal{I}(M) \iff |I \cap E_i| \leq k_i, \forall i$.

1.2. Truncación

Sean $M = (E, \mathcal{I})$ matroide, $k \in \mathbb{N}$.

Definición. $M^k := (E, \{I \in \mathcal{I} : |I| \leq k\})$.

Teorema 2. *M^k es matroide.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{I}(M^k)$ con $|Y| > |X|$. Dado que $X, Y \in \mathcal{I}$, $\exists z \in Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$. Como $|X| < |Y| \leq k$, entonces $|X + z| = |X| + 1 \leq k$ y se tiene que $X + z \in \mathcal{I}(M^k)$. □

Ejemplo (Laminar de dos niveles)**.** Sean $\{E_i\}_{i=1}^n$ disjuntos. La *matroide laminar de dos niveles* es $M = (\bigoplus M_i)^k$, con $M_i = U(E_i, k_i)$.
El ejemplo anterior se puede aplicar al caso de una oficina con n departamentos, en donde se debe contratar a un máximo de k empleados, repartidos entre los distintos departamentos, cada uno de los cuales tiene una restricción k_i sobre la cantidad de empleados que pueden agregar a su planta. Así, la matroide que tiene como conjunto de referencia los posibles empleados y como conjuntos independientes a los conjuntos de empleados que se pueden contratar simultaneamente es la matroide laminar descrita.

$$M : \overbrace{\overset{\leq k_1}{\boxed{E_1}} \quad \overset{\leq k_2}{\boxed{E_2}} \quad \cdots \quad \overset{\leq k_n}{\boxed{E_n}}}^{\leq k}$$

1.3. Borrado

Sean $M = (E, \mathcal{I})$ y $F \subseteq E$.

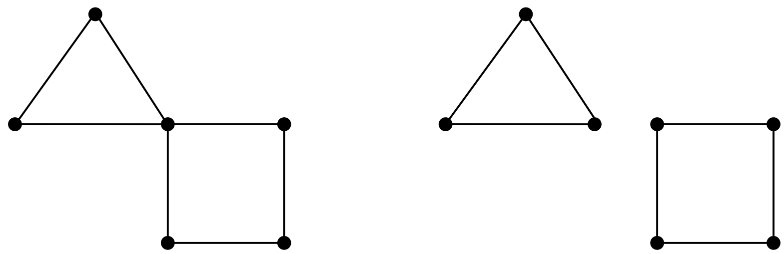
Definición. $M \setminus F := (E \setminus F, \{I \in \mathcal{I} : I \cap F = \varnothing\})$.

Teorema 3. *$M \setminus F$ es matroide.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{I}_F = \{I \in \mathcal{I} : I \cap F = \varnothing\}$ con $|Y| > |X|$. Como $X, Y \in \mathcal{I}$, entonces existe $z \in Y \setminus X$ tal que $X + z \in \mathcal{I}$. Además, ya que $Y \cap F = \varnothing$, z no está en F y, por lo tanto, $(X + z) \cap F = \varnothing$, lo que concluye la demostración. □

Ejemplo. Sean $G = (V.E)$ grafo, $M = (E.\mathcal{I})$ matroide gráfica asociada a G y $F \subseteq E$. Entonces $M \setminus F$ es la matroide de $G \setminus F = (V, E \setminus F)$.

⚠ **Advertencia.** Existen grafos distintos con la misma matroide gráfica.



1.4. Dual

Definición. Dada $M = (E, \mathcal{I})$ matroide. Un conjunto F se dice generador de M si F continene una base de M.

Definición. Definimos el dual de $M = (E, \mathcal{I})$ como $M^* = (E, \{F \subseteq E : E \setminus F$ es generador de $M\})$.

Ejemplo. Si M es gráfica de un grafo conexo $G = V, E$, tenemos que

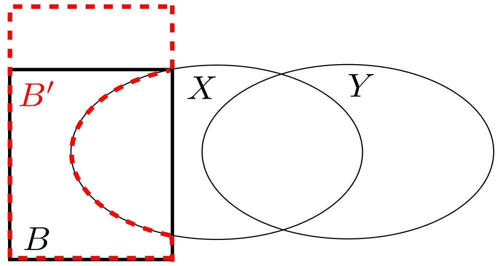
$$\begin{aligned} F \in \mathcal{I}(M^*) &\iff E \setminus F \text{ es generador de } M \\ &\iff G \setminus F \text{ contiene un árbol generador de } G \\ &\iff (V, E \setminus F) \text{ es conexo.} \end{aligned}$$

En general, si G no es conexo, $F \in \mathcal{I}(M^*) \iff (V, E \setminus F)$ tiene las mismas componentes conexas que G.

Teorema 4. *Si $M = (E, \mathcal{I})$ es matroide, entonces $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ es matroide.*

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{I}^*$ con $|Y| > |X|$. Como $Y \in \mathcal{I}^*$, entonces existe $B \subseteq E \setminus Y$ base de M. Luego, $B \setminus X$ es independiente en M.
Como $E \setminus X$ contiene una base, entonces podemos "aumentar" $B \setminus X$ a una base de M en $E \setminus X$, que llamaremos B'. Tenemos que $B \setminus X \subseteq B' \subseteq E \setminus X$. Además, como B y B' tienen el mismo tamaño

$$|B'| = |B| = |B \setminus X| + |B \cap X| = |B \setminus X| + \underbrace{\text{elementos agregados}}_{B' \setminus (B \setminus X)}$$



Es decir, agregamos $|B \cap X|$ elementos. Como en $Y \setminus X$ hay más elementos que en $X \setminus Y \supseteq B \cap X$, entonces existe $z \in Y \setminus X$ tal que $z \notin B'$. Luego, $X + z$ y B' son disjuntos, por lo que $X + z \in \mathcal{I}^*$. $\square$

Propiedades

1. Las bases de M^* son exactamente los complementos de las bases de M.
2. $(M^*)^* = M$.

Demostración. Notemos que las bases de M definen a M (ver Def. 4 del complemento 2).

1. Sea B base de M. Luego, $E \setminus B \in \mathcal{I}^*$ y $\forall z \in E \setminus (E \setminus B) = B$, $E \setminus B + z \notin \mathcal{I}^*$, ya que $E \setminus (E \setminus B + z) = B - z$ no contiene ninguna base. Por la maximalidad de $E \setminus B$, se concluye que es base.

   Por otro lado, si B^* es base de M^*, entonces $E \setminus B^*$ es generador de M, pero B^* es maximal en $\mathcal{I}^*$, por lo tanto, $\forall z \in E \setminus B^*$, $B^* + z \notin \mathcal{I}^*$. Es decir, $(E \setminus B^*) - z = E \setminus (B^* + z)$ no contiene ninguna base, pero $E \setminus B^*$ sí, con lo que se concluye que $E \setminus B^*$ es base de M.

2. Basta notar que por la propiedad anterior, las bases de M y M^{**} son las mismas.

$\square$

1.5. Contracción

Definición. Dados $M = (E, \mathcal{I})$ matroide y $F \subseteq E$, definimos

$$M/F := (M^* \setminus F)^* = (E \setminus F, \{X \subseteq E \setminus F : X \cup B_F \in \mathcal{I}\})$$

Donde B_F es cualquier base de F.

Observación. $(M^* \setminus F)^*$ *está bien definida. La segunda definición es válida para cualquier* B_F *que elija.*

Propiedades

1. $(M \setminus F_1)/F_2 = (M/F_2) \setminus F_1$.
2. $r_{M^*}(U) = |U| + r_M(E \setminus U) - r_M(E)$.
3. $r_{M^k}(U) = \text{mín}(r_M(U), k)$.
4. $r_{M \setminus F}(U) = r_M(U)$.
5. $r_{M/F}(U) = r_M(U \cup F) - r_M(F)$.