MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°4

12 de septiempre de 2013

Glosario
Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide y $X \subseteq E$.

- Una **base** es un conjunto independiente maximal.
- Un **circuito** es un conjunto dependiente minimal.
- El **rango** de X es $r(X) = \max\{|Y| \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$
- $\text{span}(X)$ es el conjunto maximal de $\{Y \subseteq E \mid X \subseteq Y, r(X) = r(Y)\}$. Se tiene que $x \in \text{span}(X) \iff r(X) = r(X + x)$.
- El **dual** de M es la matroide $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$, donde las bases de M^* son los complementos de las bases de M.
- **Borrar** X de M deja la matroide $M \backslash X = (E \backslash X, \{I \in \mathcal{I} \mid I \cap X = \emptyset\})$.
- **Contraer** X de M deja la matroide $M/X = (M^* \backslash X)^*$.

P1) Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide y $w \colon E \to \mathbb{R}^+$ función de peso. Considere el siguiente algoritmo para encontrar la base de peso máximo.

Algoritmo 1 GLOTÓN-BASE 2

Tomar $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$ en orden decreciente.
$S \leftarrow \emptyset$
for $i = 1, \ldots, k$ **do**
  if $e_i \notin \text{span}(S)$ **then**
    $S \leftarrow S + e_i$
  end if
end for

Muestre que el algoritmo retorna una base de peso máximo.

P2) Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide, $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ su dual y $X \subseteq E$.

a) $(M \backslash X)^* = M^*/X$.
b) $X \in \mathcal{I}$ ssi $\text{span}^*(E - X) = E$. (Aquí span^* es la función span de M^*.)
c) Si $X \in \mathcal{I}$ y $E - X \in \mathcal{I}^*$, entonces X es base de M y $E - X$ es base de M^*.

P3) Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide, $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ su dual. Definimos un **cocircuito** como los circuitos de M^*. Demuestre:

a) Si M es una matroide gráfica de un grafo conexo, ¿cómo son sus cocircuitos?.
b) Sea C circuito de M y C^* un cocircuito. Entonces $|C \cap C^*| \neq 1$.
c) M es uniforme ssi para cada circuito C de M y cada cocircuito C^*, $C \cap C^* \neq \emptyset$.