MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Abner Turkieltaub y Benjamín Ruiz.
Fecha: 9 de Septiembre de 2013.

Cátedra 7

1. Operaciones en matroides

1.1. Propiedades pendientes

En la clase anterior definimos varias operaciones de matroides, a continuación veremos algunas propiedades que quedaron pendientes.

Lema 1. *Si dos matroides $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ tienen la misma función de rango $r : E \to \mathbb{N}$, entonces $M_1 = M_2$.*

Demostración. $\mathcal{I}_i = \{F \subseteq E : r(F) = |F|\}$. □

Recordemos que dada una matroide M, se define su dual, M^*, como la matroide cuyas bases son los complementos de las bases de M.

Proposición 1. $r_{M^*}(X) = |X| + r_M(E \setminus X) - r_M(E)$

Demostración. Sean β y β^* las bases de M y M^* respectivamente, luego:

$$\begin{aligned}
r_{M^*}(X) &= \text{máx}\{|X \cap B| : B \in \beta^*\} \\
&= \text{máx}\{|X \setminus B| : B \in \beta\} \\
&= |X| - \text{mín}\{|X \cap B| : B \in \beta\} \\
&= |X| - \text{mín}\{|B| - |B \setminus X| : B \in \beta\} \\
&= |X| - r_M(E) + \text{máx}\{|B \setminus X| : B \in \beta\} \\
&= |X| - r_M(E) + \text{máx}\{|B \cap (E \setminus X)| : B \in \beta\} \\
&= |X| - r_M(E) + r_M(E \setminus X).
\end{aligned}$$

□

Recordemos que dado $F \subseteq E$ podemos definir la matroide contracción de F en M como $M/F = (M^* \setminus F)^*$.

Proposición 2. $r_{M/F}(X) = r_M(X \cup F) - r_M(F)$.

Demostración. Sea $X \subseteq E \setminus F$,

$$\begin{aligned}
r_{M/F}(X) &= r_{(M^* \setminus F)^*}(X) \\
&= |X| + r_{M^* \setminus F}((E \setminus F) \setminus X) - r_{M^* \setminus F}(E \setminus F) \\
&= |X| + |E \setminus (F \cup X)| + r_M(F \cup X) - r_M(E) - (|E \setminus F| + r_M(F) - r_M(E)) \\
&= r_M(F \cup X) - r_M(F).
\end{aligned}$$

En el último paso ocupamos que $|X| + |E \setminus (F \cup X)| = |E \setminus F|$.

□

Observación. *Si B_F es base de F en M:*

$$r_{M/F}(X) = r_M(F \cup X) - r_M(F) = r_M(B_F \cup X) - r_M(B_F).$$

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{I}(M/F) &\Leftrightarrow |X| = r_{M/F}(X) = r_M(B_F \cup X) - r_M(B_F) \\ &\Leftrightarrow |X| + |B_F| = r_M(B_F \cup X) \\ &\Leftrightarrow |X \cup B_F| = r_M(B_F \cup X) \\ &\Leftrightarrow X \cup B_F \in \mathcal{I}(M). \end{aligned}$$

No olvide que $X \subseteq E \setminus F$,

1.2. Contracción en matroides gráficas

Sea $G = (V, E)$ un grafo (no necesariamente simple) y $M = M(G)$ su matroide gráfica.

Observación. *Si X e Y son disjuntos:*

- $(M \setminus X) \setminus Y = (M \setminus Y) \setminus X = M \setminus (X \cup Y)$.
- $(M/X)/Y = (M/Y)/X = M/(X \cup Y)$.

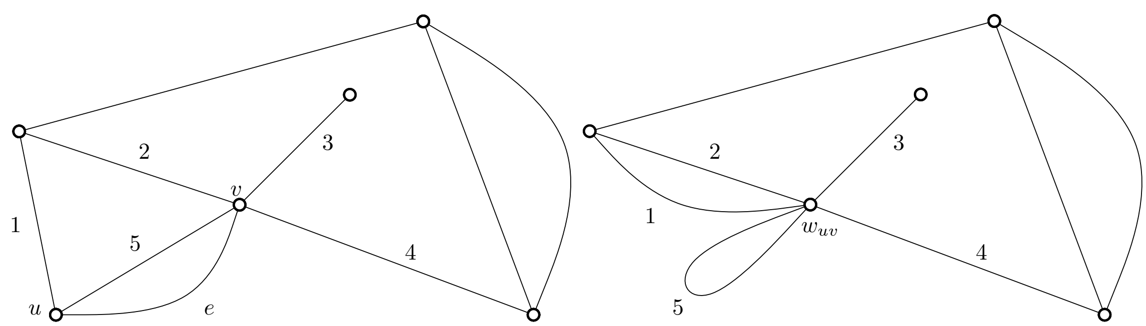
Dada esta observación estudiemos qué significa contraer $e \in E$, $e = uv$.

Definición 1. Consideremos el grafo G/e, de modo que:

$$\begin{aligned} V(G/e) &= V \setminus \{u, v\} + w_{uv}, \\ E(G/e) &= E - e, \end{aligned}$$

donde w_{uv} es nuevo vértice y los extremos de ciertas aristas cambian:
Si f era incidente a u ó v la pondremos incidente a $w_{u,v}$.

Ejemplo. Grafo G/e



(a) Grafo $G = (E, V)$ (b) Grafo G/e, al contraer $e \in E$ de G

Figura 1: Contraer $e = uv$.

Teorema 1. *$M_1 = M(G/e)$, matroide gráfica de G/e es justamente $M_2 = M(G)/\{e\}$.*

Demostración. Notar que C es ciclo en G/e que toca a w_{uv} $\Leftrightarrow$ $C + e$ es ciclo en G.

($\Rightarrow$) Sea $X \in \mathcal{I}(M_1)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow X + e \text{ en } G \text{ es acíclico.} \\ &\Rightarrow X \text{ es independiente en } M_2 = M(G)/\{e\}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) [Ejercicio]

$\square$

Observación. *Si* $e = uu \Rightarrow M/e = M \setminus e$ *(Demuéstrelo)*

Definición 2. Sean M y M' matroides, se dice que M' es menor de M si M' puede obtenerse de M mediante borrados y contracciones.

Teorema 2. *Si* M' *es menor de* M *y* M *es gráfica, entonces* M' *es gráfica.*

1.3. Propiedades del rango

Definición 3. Una función $f : 2^V \to \mathbb{R}$ se dice submodular si

$$(\forall A, B \subseteq V) \quad f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B).$$

Proposición 3. *Sea* $M = (E, \mathcal{I})$ *matroide, y* $r : 2^E \to \mathbb{N}$ *su función de rango, entonces* r *satisface los siguientes axiomas:*

(R1) $0 \leq r(X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq E.$

(R2) $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y).$

(R3) r *es submodular.*

Demostración. Se demostrará (R3): Sea J una base de $X \cap Y$, extendemos J a una base K de $X \cup Y$, luego:

$$\begin{aligned} r(X \cup Y) + r(X \cap Y) &= |K| + |J| \\ &= |K \cap X| + |K \cap Y| - |K \cap (X \cap Y)| + |J| \\ &= |K \cap X| + |K \cap Y| \\ &= r(K \cap X) + r(K \cap Y) \\ &\leq r(X) + r(Y). \end{aligned}$$

$\square$

Observación. *Las funciones submodulares en matemáticas discretas son como las funciones convexas de las matemáticas continuas.*

[Ejercicio]. Si $r : 2^V \to \mathbb{R}$ satisface (R1), (R2) y (R3) entonces $\{F : |F| = r(F)\}$ define una matroide.

2. Grafos Dirigidos

Ahora empezaremos el estudio de grafos dirigidos, para esto partiremos dando unas cuantas definiciones.

Definición 4. Un grafo dirigido o digrafo $G = (V, E)$ con V, E finitos es un par de nodos (V) y arcos (E) tal que a cada arco e se la asocia una cola $t(e)$ y una cabeza $h(e)$. Se tienen las siguientes consideraciones:

- Dos arcos con igual cola y cabeza se llaman paralelos.

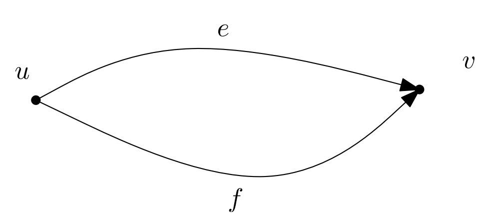


Figura 2: Arcos parelelos.

- Si $h(e) = t(f)$ y $h(f) = t(e)$, e y f se dirán antiparalelos.
- Si no hay arcos paralelos, el digrafo se dice simple y $E \subseteq V \times V$.
- El grafo no dirigido subyacente de G dirigido se obtiene al remover las direcciones de los arcos.
- Se habla de caminos, ciclos y paseos dirigidos.
- Sea $F \subseteq E$ con $G = (V, E)$ digrafo y sean $U, W \subseteq V$ disjuntos, se define:
    - $F^+[U; W] = \{e \in F : t(e) \in U, h(e) \in W\}$.
    - $F^-[U; W] = F^+[W; U]$.
    - $\delta_F^{\pm}(U) = F^{\pm}[U; V \setminus U]$.
    - $\delta_F(U) = \delta_F^+(U) \cup \delta_F^-(U)$.
    - $d_F^{\pm}(U) = |\delta_F^{\pm}(U)|$.

  Si no hay índice F se sobreentiende que $F = E$.
  Si G es un digrafo simple, $F^+[U; W] = F \cap (U \times W)$.

Proposición 4. *Sea $G = (V, E)$ digrafo. $d^+(U) = |\delta^+(U)|$ es submodular, es decir*

$$d^+(A \cup B) + d^+(A \cap B) \leq d^+(A) + d^+(B).$$

Indicación: Compruebe que $d^+(A \cup B) + d^+(A \cap B) = d^+(A) + d^+(B) - (|E^+[A; B]| + |E^+[B; A]|)$.

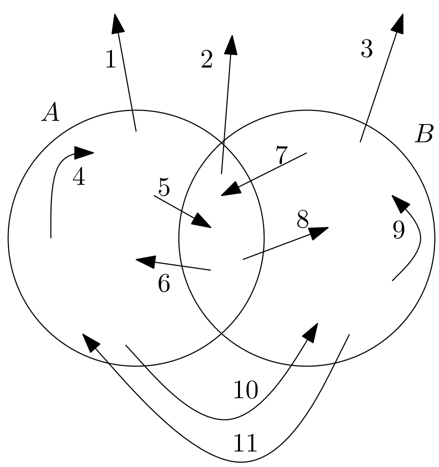


Figura 3: Indicación: Considerar todos los casos posibles.