

MA4701-1 - Optimización Combinatorial

Profesor: José Soto

Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries



Auxiliar N°5

30 de septiembre de 2013

- P1.** Sea G un digrafo. Un *orden topológico* de G es una función $\pi : V(G) \rightarrow [n]$ tal que para todo arco dirigido $e \in E(G)$, se tiene $\pi(t(e)) < \pi(h(e))$.
- (a) Demuestre que un digrafo G es acíclico si y sólo existe un orden topológico en G .
- (b) Suponga que G es acíclico. Diseñe un algoritmo que encuentre un orden topológico de G . Demuestre su correctitud y analice su complejidad.
- P2.** Sea G dirigido acíclico, $u, v \in V(G)$. Diseñe un algoritmo que calcule la cantidad de (u, v) -camino dirigidos. Pruebe su correctitud y analice su complejidad.
- P3.** Sea $n \in \mathbf{N}$ fijo. Usted dispone de n piezas de dominó, asociadas con números en $[n]$. Cada una de estas piezas tiene asociada dos números enteros i_1 y i_2 , anotadas en sendos casilleros de cada dominó. Queremos formar una hilera con todas estas piezas, de manera tal que todas estén en orden. Para cada pieza escogemos una orientación, es decir, escogemos un primer valor a_n y un segundo valor b_n de los dos disponibles que tenía la pieza, de forma tal que $\{a_i, b_i\} = \{i_1, i_2\}$. El valor de una elección de orientaciones estará dado el valor absoluto de la resta de los valores «adyacentes» en cada par de dominós. Más precisamente, el valor equivale a

$$\sum_{i=2}^n |a_i - b_{i-1}|$$

Por ejemplo, si tengo 3 piezas con valores $(5, 4)$, $(5, 2)$ y $(1, 3)$; escoger las orientaciones $(4, 5)$, $(5, 2)$ y $(3, 1)$ entrega un valor de $|5 - 5| + |2 - 3| = 1$. En este caso, estas orientaciones entregan un valor mínimo.

Diseñe un algoritmo que, dado n y los valores (i_1, i_2) para $1 \leq i \leq n$, encuentre un conjunto de orientaciones que sea de valor mínimo. Demuestre su correctitud y analice su complejidad.

- P4.** Suponga que usted tiene una cantidad estrictamente positiva de dinero en pesos chilenos. Con el objetivo de ganar más, usted se dirige a una casa de cambio que maneja n divisas nacionales e internacionales. Dado un par (i, j) de divisas distintas, su *tasa de cambio* está dada por un real $c_{ij} > 0$. Esto es, si usted le entrega k unidades de la divisa i a la casa de cambio, le deben entregar kc_{ij} unidades de la divisa j .

Dada una colección de divisas y tasas de cambio, encuentre un algoritmo que decida si existe una serie de transacciones que le permiten obtener una cantidad arbitrariamente alta de pesos chilenos. Demuestre su correctitud y analice su complejidad.