MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Ivana Bachmann y Bruno Aguiló.
Fecha: 13 de Septiembre de 2013.

Cátedra 8

1. Distancia entre grafos dirigidos

1.1. Problema del (di)camino de largo mínimo

Sea $G = (V, E)$ un digrafo, $s \in V, t \in V$ y sea $l : E \to \mathbb{R}$ una función de largo. Se desea encontrar, si es que existe, un $s-t$ camino de largo total mínimo. Es importante notar que al hablar de *largo* no nos estamos refiriendo necesariamente a cantidades físicas, y es por eso que la función l puede tomar valores negativos. Así se le puede dar aplicaciones económicas y, por ejemplo, interpretar los arcos del digrafo como el trayecto desde un nodo hacia otro, que puede reportar ganancias o pérdidas de dinero; conviene, entonces, para viajar de s a t, buscar el $s-t$ camino de largo mínimo, con función de largo dada por $l(u, v) = -$la ganancia de viajar de u a v.

Observación. *El $s-t$ paseo de largo mínimo puede no estar definido. Puede ocurrir que exista un ciclo de costo negativo en el $s-t$ paseo, con lo cual el costo mínimo no sería acotado.*

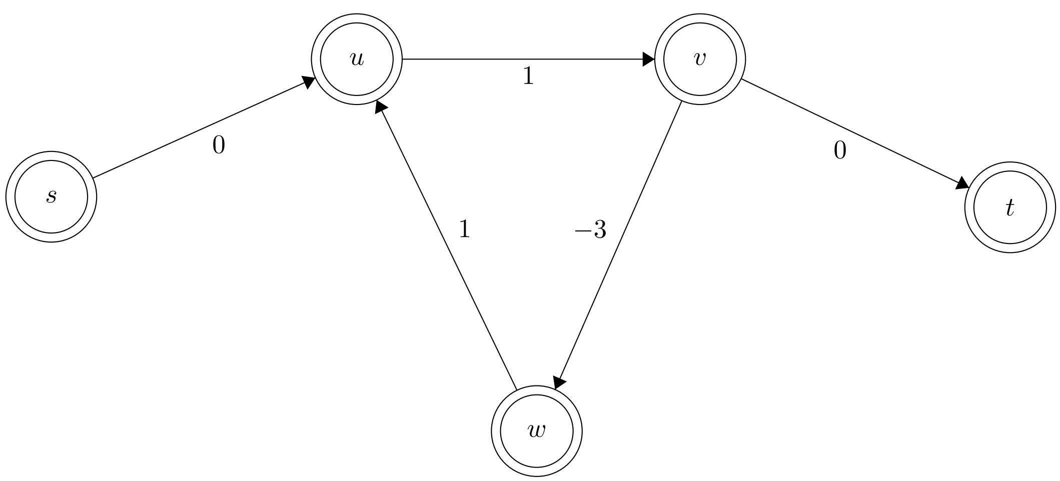

Figura 1: Un $s-t$ paseo con un ciclo de largo total negativo.

Sin embargo en este caso se puede encontrar un $s-t$ camino de costo mínimo.

Observación. *Si existen ciclos negativos en G, entonces el problema de camimo mínimo es difícil. ¿Qué tan difícil? NP-difícil, es decir, se cree que no se puede resolver en tiempo polinomial o bien que no es posible de resolver.*

Ejemplo. Un camino hamiltoniano en G es un camino que pasa por todos sus vértices exactamente una vez. El problema de encontrar un camino hamiltoniano en un grafo G es NP-difícil. En particular se "cree" que no admite algoritmo polinomial.
Veamos que si existen ciclos negativos, encontrar un camino mínimo en G es NP-difícil:
En efecto, supongamos que A resuelve el problema de encontrar un camino mínimo cuando G contiene ciclos negativos. Es posible resolver el problema de encontrar un camino hamiltoniano usando A.

Dado $G = (V, E)$, lo transformamos en un grafo dirigido $\vec{G} = (V, \vec{E})$ poniendo ciclos entre cada par de nodos conectados por un arco en G, como muestra la Figura 2. A este le asociamos:

$$w : E \to \mathbb{R}$$
$$w(\vec{e}) = -1$$

Ahora, para todo $(s,t) \in V \times V$, usamos A para encontrar un camino de s a t. Si alguno de ellos tiene largo $-(\mid V \mid -1)$, este es un camino hamiltoniano.

Luego, si se cuenta con una forma de resolver el problema original, entonces se podría resolver un problema NP-difícil y por lo tanto el problema original también lo es.

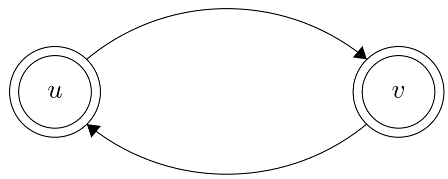

Figura 2: Poner un ciclo entre u y v, que estaban conectados en G.

Nosotros nos restringiremos a resolver el problema del camino mínimo cuando **no existen ciclos negativos**.

Definición 1. Dada una función $l : E \to \mathbb{R}$ diremos que es *conservativa* si para todo diciclo C en G, $l(C) \geq 0$.

Definición 2. Llamaremos $d(s,t)$ al largo de un camino mínimo de s a t. Si no existe tal camino, $d(s,t) = +\infty$.

Observación. *Para un grafo $G = (V,E)$, la distancia entre s y t es $d(s,t)$, con $l(e) = 1\ \forall e \in E$.*

1.2. Criterio de optimalidad de Bellman

Teorema 1. *Sea G un grafo dirigido de largos conservativos. Si P es un $s{-}t$ camino de largo mínimo cuyo "penúltimo" vértice es u, entonces $Q = P \setminus \{t\}$ es un $s-u$ camino de largo mínimo .*

Demostración. Sea R un camino de largo mínimo de s a u, luego

$$l(R) \leqslant l(Q) = l(P) - l(u,t)$$

- Si R no pasa por t:

  $$R \cup \{(u,t)\} \text{ es } s-t \text{ camino} \implies l(R \cup \{(u,t)\}) = l(R) + l(u,t) \geq l(P) = l(Q) + l(u,t)$$

  luego,

  $$l(R) \geqslant l(Q).$$

- Si R pasa por t, supongamos $l(R) < l(Q)$. Sea R_{st} el camino que va de s a t en R y R_{tu} el camino que va de t a u en R. Definiendo $c = \{(u,t)\} \cup R_{tu}$, luego

  $$\begin{aligned} l(c) &= \underbrace{l(R_{tu})}_{\geqslant l(P)} + l(u,t) \\ &\leqslant l(R) - l(P) + l(u,t) \\ &\leqslant l(R) - l(Q) < 0. \end{aligned}$$

  Es decir, se tendría un ciclo de largo negativo, pero l es conservativa ($\rightarrow\leftarrow$)

$\square$

Corolario 1. *Dado P subcamino de un camino óptimo, entonces P es óptimo.*

Corolario 2. *Sea (u,t) arco de un grafo, entonces se cumple que $d(s,t) \leqslant d(s,u) + l(u,t)$ y $\exists w$ vértice, con (w,t) arco tal que $d(s,t) = d(s,w) + l(w,t)$.*

1.3. Algoritmo de Bellman-Ford

Definición 3. Se dirá $d_k(s,t)$ al largo del camino de costo mínimo de s a t que usa a lo más k nodos internos distintos de s y t. Si tal camino no existe, $d_k(s,t) = +\infty$. En particular se tiene $d_{n-2}(s,t) = d(s,t)$.

Observación. *En la próxima clase probaremos que* $d_k(s,t) = \min\limits_{u:(u,t)\in E, u\in\delta^-(t)} d_{k-1} + l(u,t)$.

1.3.1. Algoritmo

Entrada: Digrafo $G = (V,E)$, l función de largos consevativa y $s \in V$
Definir $d_0(s,s) = 0$
$\forall u \in V - s \ d_0(s,u) = \begin{cases} l(s,u) \text{ si } (s,u) \in E. \\ +\infty \text{ si } (s,u) \notin E. \end{cases}$
for $k : 1, \cdots, n-2$
  $\forall u \in V - s : d_k(s,u) = \min\{d_{k-1}(s,u); \min\limits_{w\in\delta^-(u)} d_{k-1}(s,w) + l(w,u)\}$
Retornar $d_{n-2}(s,t)$.

¿Cuál es el orden de este algoritmo?

Aproximadamente $O(\mid V \mid^2\mid E \mid)$. Sin embargo se puede mejorar.

Observación. *Este algoritmo guarda los número que obtiene en una tabla y calula nuevas entradas en función de entradas anteriories. Esto es lo que se llama programación dinámica.*

Cabe destacar que el algoritmo de Bellman-Ford se puede modificar para que este encuentre el **camino** y no sólo la distancia.