MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°7

14 de octubre de 2013

P1. Muestre que un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de largo impar.

P2. (Kőnig y Egerváry, 1930) Considere una matriz M con coeficientes en $\{0,1\}$. El *rango periódico* de M es el máximo número de unos que puedo seleccionar sin que exista un par que estén en la misma fila o la misma columna. Un *cubrimiento* de M es un conjunto de filas y columnas tal que al eliminarlas, la matriz sólo contiene ceros. Muestre que el rango periódico de M es igual al tamaño de un cubrimiento mínimo.

P3. Dos jugadores se turnan para jugar un juego sobre un grafo G. El primer jugador comienza el juego escogiendo un vértice $v_1 \in V(G)$. En el turno i-ésimo, el jugador correspondiente escoge un vértice $v_i \in V(G)$, con la condición que v_i sea adyacente a v_{i-1} y además que $v_i \notin \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$. Si un jugador no puede realizar ninguna jugada en su turno, pierde (y gana el otro).

¿En qué tipo de grafos el primer jugador tiene una estrategia ganadora? ¿Y el segundo?

P4. (Dilworth, 1950) Considere un conjunto finito P que tiene definida una relación $\leq$ que es un orden parcial (reflexiva, transitiva, antisimétrica). Al par $(P, \leq)$ se le llama *conjunto parcialmente ordenado* o *poset*. Dos elementos $x, y \in P$ se dicen *comparables* si $x \leq y$ o $y \leq x$. Una *cadena* es $C \subseteq P$ tal que todo par de elementos de C son comparables entre sí. Una *anticadena* es $A \subseteq P$ tal que ningún par de elementos distintos de A son comparables entre sí.

Pruebe que el mínimo número de cadenas que particionan P es igual al máximo tamaño de una anticadena.

Indicación: Construya el grafo bipartito dado por $G = (U \cup V, E)$ donde U y V son copias de P, y para $u \in U$ y $v \in V$, la arista $uv \in E(G)$ si y sólo si $u < v$ en $(P, \leq)$. Use Kőnig en G y concluya encontrando una biyección adecuada.

P5. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple en n vértices, sin vértices aislados (o sea, $d(v) \neq 0$ para todo $v \in V(G)$). Un *cubrimiento de aristas* es $F \subseteq E(G)$ tal que todo vértice de V es extremo de alguna arista en F.

(a) Sea $\mu(G)$ el tamaño de un emparejamiento máximo en G y $\nu(G)$ el tamaño de un cubrimiento de aristas mínimo. Muestre que $\nu(G) = n - \mu(G)$.

(b) Suponga que G es bipartito. Diseñe un algoritmo que encuentre un cubrimiento de aristas de cardinalidad mínima. Pruebe su correctitud y analice su complejidad.