MA4701-1 - Optimización Combinatorial
Profesor: José Soto
Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries

Auxiliar N°8

17 de octubre de 2013

Resumencito

- El problema de asignación busca, dado un grafo bipartito completo $G = (L, R, E)$ con $|L| = |R|$ y una función de costos de los arcos $c : E \to \mathbb{R}$, un matching perfecto de peso mínimo. Para solucionarlo conocemos el algoritmo húngaro, con tiempo $O(n^3 \log n)$.

P1) Sea $G = (L, R, E)$ grafo bipartito, $c : E \to \mathbb{R}$ una función de pesos de los arcos. Muestre que calcular matching de peso máximo se puede reducir al problema de asignación, construyendo un nuevo grafo con $O(|E|)$ arcos y $O(|V|)$ nodos. (Consecuencia: si tenemos un algoritmo que resuelve el problema de asignación en tiempo $O(f(|V|, |E|))$, entonces tenemos un algoritmo que resuelve el problema de matching de peso máximo en grafos bipartitos en $O(f(|V|, |E|))$.)

P2) Sea $G = (L, R, E)$ grafo bipartito, $c : E \to \mathbb{R}$ una función de pesos de los arcos. Suponga que usted quiere encontrar el matching de peso máximo de tamaño k. Muestre que solucionar este problema se puede reducir al problema de asignación.

P3) Sea $G = (L, R, E)$ grafo bipartito, $c : E \to \mathbb{R}$ una función de pesos de los arcos, tal que G contiene al menos un matching de tamaño $k + 1$.

a) Sea M_k un matching de tamaño k de peso máximo. Muestre que existe un camino aumentante P tal que $M_k \triangle P$ es un matching de peso máximo de tamaño $k + 1$.

b) Lo anterior sugiere un algoritmo para encontrar, para todo k, un matching de peso máximo de tamaño k: Empezar del matching vacío ($M_0 = \emptyset$) y, dado M_k, encontrar un matching de peso máximo de tamaño $k + 1$ buscando el camino M_k-aumentante que más aumenta el peso del matching. ¿Cómo buscaría ese camino aumentante? ¿De qué orden es el algoritmo?