MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Andrés Cristi y Pedro Vergara I.
Fecha: 11 de Octubre de 2013.

Cátedra 15

1. Algortimo Húngaro Primal-Dual

Recordemos que el algoritmo húngaro primal-dual recibe como entrada una matriz de costos c_{ij} y devuelve un matching perfecto M de costo mínimo junto con el par (u,v) dual óptimo. Veamos su seudocódigo:

Algoritmo 1 Algoritmo Húngaro Primal-Dual

Solución Inicial:
$u_j \leftarrow 0,\ \forall i \in A.$
$v_j \leftarrow \text{mín}_{i\in A}\ c_{ij}, \forall j \in B.$
$w_{ij} \leftarrow c_{ij} - u_i - v_j.$
$F_o \leftarrow \{ij \in E : w_{ij} = 0\}.$
$M \leftarrow$ matching máximo en F_0.
while (M no es matching perfecto en F_0) **do**
    $s \leftarrow$ nuevo vértice fuera de $A \cup B$.
    $F_{dir} \leftarrow \{(i,j) \in A \times B : ij \in F_o \setminus M\} \cup \{(j,i) \in B \times A : ij \in M\} \cup \{(s,i) \in \{s\} \times A : i$ es M-expuesto$\}$.
    $L \leftarrow$ vértices alcanzables desde s en $(V + s, F_{dir})$.
    $\delta \leftarrow \text{mín}_{i\in A\cap L, j\in B\setminus L}\ w_{ij}.$
    $u_i \leftarrow u_i + \delta,\ \forall i \in A \cap L.$
    $v_j \leftarrow v_j - \delta,\ \forall j \in B \cap L.$
    Actualizar F_0 y M.
end while
return $M, u, v.$

Es importante recordar que el algoritmo recién enunciado encuentra un matching perfecto de costo mínimo en el grafo bipartito $G = (A\dot{\cup}B, E)$ con $E = A \times B, |A| = |B| = n$ y $C_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Además se basa es la siguiente igualdad entre los valores óptimos de los problemas primal y dual:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{mín} \displaystyle\sum_{i\in A, j\in B} x_{ij}c_{ij} & = & \text{máx} \displaystyle\sum_{i\in A} u_i + \sum_{j\in B} b_j \\
s.a & & s.a \\
\displaystyle\sum_i x_{ij} = 1\ \forall j \in B & & u_i + v_j \leq c_{ij} \\
\displaystyle\sum_j x_{ij} = 1\ \forall i \in A & & \\
x \geq 0 & &
\end{array}
$$

Los siguientes resultados serán consecuencia de la correctitud del algoritmo.

Teorema 1 (Birkhoff - Von Neumann).
Todo punto extremo del politopo $P = \{x \in \mathbb{R}^E : \sum_j x_{ij} = 1, \sum_i x_{ij} = 1, x \geq 0\}$ *es integral y en particular es el vector indicatriz del algún matching.*

Teorema 2 (König-Egerváry).
Si los costos c_{ij} *son enteros, entonces existe el par* (u, v) *solución dual óptima entera.*

El siguiente diagrama explica el funcionamiento del algoritmo:

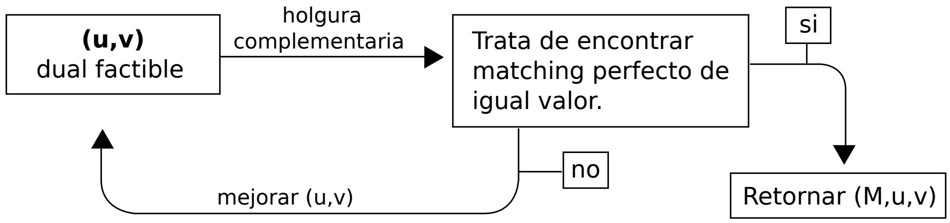


Figura 1: Esquema del algoritmo húngaro.

Veamos qué pasa al salir del ciclo while. Entonces, si M es perfecto, tenemos que $\sum_{ij\in M} c_{ij} = \sum_{i\in A} u_i + \sum_{j\in B} v_j$, ya que $M \subseteq F_0$. Luego, si el algoritmo termina, tendremos que su solución es óptima. En lo que sigue mostraremos que el algoritmo siempre termina.

Si al principio de una iteración M no es perfecto, entonces $C = (A \setminus L) \cup (B \cap L)$ es un cubrimiento mínimo de F_0.

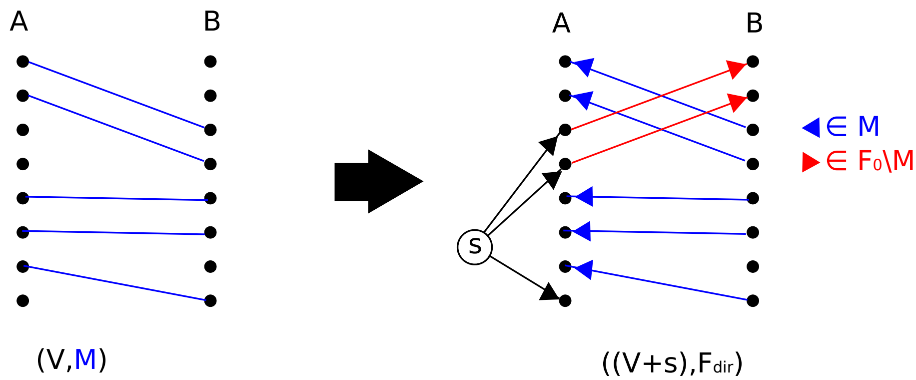


Figura 2: Construcción del grafo dirigido.

Probemos por contradicción que C es cubrimiento. Supongamos que $i \in A\cap L, j \in B\setminus L$ son tales que ij no está cubierto.

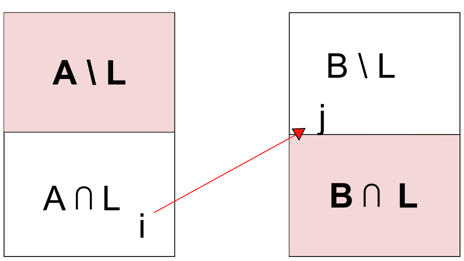


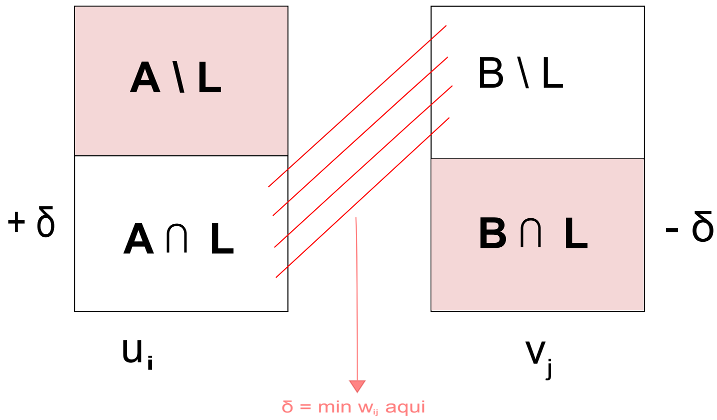
Figura 3: Cubrimiento mínimo de F_0.

- $ij \notin F_o \setminus M$ pues entonces $(i, j) \in F_{dir}$, pero i es alcanzable y j no es alcanzable, lo cual es una contradicción.
- $ij \notin$ M pues si estuviera sería el único arco con cabeza en i en F_{dir}. Pero i es alcanzable y luego j es alcanzable, lo que también es una contradicción.

Luego C es cubrimiento de F_o.

Veamos que $|C| = |M|$. En efecto, si $ij \in M$, entonces, o bien ambos i y j son alcanzables, o bien ambos no lo son. Por lo tanto, las aristas de M tienen un solo extremo en C y luego, necesariamente, $|M| = |C|$.

Volvamos al algoritmo.



Como C es un cubrimiento de F_0, las aristas $ij \in A \cap L \times B \setminus L$ no están en F_0. Por lo tanto, $\delta = \min_{ij \in A \cap L \times B \setminus L} w_{ij} > 0$.

Figura 4: Cubrimiento mínimo de F_0.

Llamemos u' y v' a los vectores calculados en las lineas 12 y 13 del algortimo. La clase pasada observamos que $u'_i + v'_j \geq C_{ij}, \forall i, j \in A \times B$. Con lo cual, (u', v') también es factible.

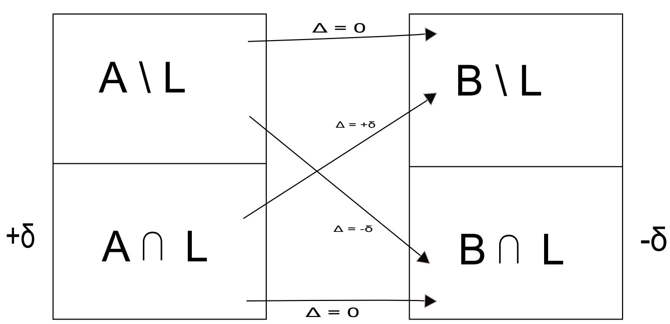
Por otro lado tenemos que el costo de la nueva solución dual menos la antigua, $u'(A) + v'(B) - u(A) - v(B)$ es igual a

$$\begin{aligned}
&\delta(|A \cap L| - |B \cap L|) & \\
=&\delta(|A| - (|A \setminus L| + |B \cap L|) & \geq \delta \cdot 1 \\
=&\delta(|A| - |M|) & \geq \delta \cdot 1
\end{aligned}$$

Lo anterior dice que en cada iteración en que M no es matching perfecto, encontramos una solución dual que es estrictamente mayor que la solución dual anterior, con lo cual nos acercamos a la solución óptima. Veremos a continuación que el número de iteraciones necesarias para llegar al óptimo es finita y acotada por un polinomio.

Lema 1. *El número de iteraciones es $O(n^2)$.*

Demostración.



F_0 cambia, pero si $e \in M \subseteq F_0$, entonces e está siempre en F_0.

Figura 5: Iteración del algoritmo.

El tamaño de M ($|M|$) no decrece. Llamemos iteración exitosa si $|M|$ crece (no pueden haber más que n iteraciones exitosas).Veamos que entre 2 iteraciones exitosas hay a lo más n iteraciones. Entre iteraciones exitosas M es máximo y no cambia.

Afirmación: Si $v \in L$ al principio de una iteración no exitosa, entonces también lo está al final. En efecto, como es alcanzable y como M no cambia, sigue estando ahí.

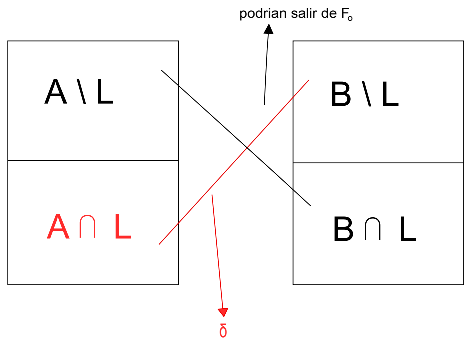


Figura 6: Modificación de F_0.

Pero si $\delta = w_{i'j'}$, con $i' \in A \cap L$ y $j' \in B \setminus L$, entonces $i'j'$ entra a $|F_0|$. Por lo tanto $|B \cap L|$ aumenta en 1 unidad durante una iteración no exitosa, lo que no se puede hacer más de n veces y entonces se prueba el lema. $\square$

Observación 1. Una iteración del ciclo **while**, toma $O(n^2)$ y por lo tanto el algoritmo termina en tiempo $O(n^4)$.

Observación 2. Se puede mejorar a $O(n^3 \log n)$ con colas de prioridad.

En las páginas anteriores probamos que el algoritmo primal-dual resuelve el problema de asignación de costo mínimo en tiempo polinomial. Gracias a esto podemos probar el **Teorema 1**:

Demostración. Para toda función de costo c, la expresión $c^T x$ con $x \in P$ se minimiza en un punto con coordenadas enteras, de aquí se deduce que todo punto extremo de P es integral. $\square$

Otra forma de plantear el Teorema 1, es decir que P es la envoltura convexa, osea,

$$P = \mathrm{conv}(\{x_M : M \text{ matchings perfectos en } E\}).$$

Con esto tenemos que si x esta en P, entonces existen matchings $M_1, ..., M_k$ y coeficientes $\lambda_1, ..., \lambda_k \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ tal que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{M_i}$.

La demostración del Teorema 2 es inmediata del hecho que si los costos c_{ij} son enteros, entonces los valores w_{ij}, δ, u_i, v_j del algoritmo siempre son enteros. Y por lo tanto al final (u, v) son enteros.

1.1. Algunas consecuencias interesantes

Resultado Birkhoff-Von Neumann para $G = (A \dot\cup B, E)$ grafo bipartito no necesariamente completo, con $|A| = |B|$:

$$\begin{aligned}
P_{\text{matching perfecto}} = \{x \in \mathbb{R}^E : \sum_i x_{ij} = 1, \sum_j x_{ij} = 1, x \geq 0\} &= \mathrm{conv}(\{\chi_M : M \text{ matching perfecto en } E\}). \\
P_{\text{matching}} = \{x \in \mathbb{R}^E : \sum_{i \in A} x_{ij} \leq 1, \sum_{j \in B} x_{ij} \leq 1, x \geq 0\} &= \mathrm{conv}(\{\chi_M : M \text{matching}\}).
\end{aligned}$$

Demostración. Sea x^* punto extremo de $P_{\text{matching perfecto}}$ y supongamos que x^* no es integral. Consideremos $F = \{e \in E : x^*_e \in (0,1)\}$. Notemos que para todo vértice i en G, el grado de i en F, $d_F(i) \neq 1$ (puede ser 0, 2 o más), pues $\sum_j x_{ij} = 1$. Luego (V, F) es un grafo sin vértices de grado 1 y, por lo tanto, existe un ciclo $C \subseteq F$.

Como G es bipartito, el ciclo es par. Enumeremos las aristas de C en el orden que aparecen y llamemos C^+ a los pares y C^- a los impares.

Sea $\delta > 0$ pequeño a ser elegido después. Definamos:

$$x^+_e = \begin{cases} x^*_e & \text{si} \quad e \notin C \\ x^*_e + \delta & \text{si} \quad e \notin C^+ \\ x^*_e - \delta & \text{si} \quad e \notin C^- \end{cases} \qquad x^-_e = \begin{cases} x^*_e & \text{si} \quad e \notin C \\ x^*_e - \delta & \text{si} \quad e \notin C^+ \\ x^*_e + \delta & \text{si} \quad e \notin C^- \end{cases}$$

Si δ es suficientemente pequeño ($\delta = \text{mín}\{\text{mín}\{x^*_e : e \in C^-\}; \text{mín}\{1 - x^*_e : e \in C^+\}\}$), entonces x^+ y x^- son puntos de $P_{\text{matching perfecto}}$. Además tenemos que esto contradice la definición de punto extremo, pues $x^* = \frac{1}{2}(x^+ + x^-)$. $\square$

La demostración para el polítopo $P_{matching}$ queda propuesta como problema controlable.