MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Complemento 3: Redes y flujos

1. Notación y propiedades de redes y flujos

- Una *red* es una 4-tupla (G, u, s, t) con $G = (V, E)$ un grafo dirigido, $u\colon E \to \mathbb{R}_+$ una función no negativa de capacidades, s un nodo origen y t un nodo destino.
- A lo largo de esta unidad trataremos las funciones $x\colon E \to \mathbb{R}$ como vectores en $\mathbb{R}^E$, y usaremos indiferentemente notación $x(e) = x_e$, además usaremos la notación $x^{\mathrm{OUT}}(v) = x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))$ y $x^{\mathrm{IN}}(v) = -x^{\mathrm{OUT}}(v)$, para todo $v \in V$.
- Un *flujo* factible en (G, u, s, t) es una función $f\colon E \to \mathbb{R}$ que satisface condiciones de *capacidad*: $(0 \le f_e \le u_e)$ para todo $e \in E$; y *conservación*: $f^{\mathrm{OUT}}(v) = 0$, para todo $v \in V - \{s, t\}$.
- El *valor* de un flujo es $f^{\mathrm{OUT}}(s) = f^{\mathrm{IN}}(t)$.
- Llamemos $\overleftrightarrow{G}$ al grafo $(V, \overleftrightarrow{E})$, donde $\overleftrightarrow{E} = E \dot\cup \overleftarrow{E}$, con $\overleftarrow{E}$ una colección de arcos *reversos* para E, que se considera disjunta a E. Dado $e \in E$, llamamos $\overleftarrow{e}$ a su reverso en $\overleftarrow{E}$. Similarmente, dado $e \in \overleftarrow{E}$, llamamos $\overleftarrow{e}$ a su reverso en E.
- Dado un flujo factible en (G, u, s, t), definimos la red residual $(\overleftrightarrow{G}, u^f, s, t)$ como la red tal que
$$u^f(e) = \begin{cases} u_e - f_e & \text{para } e \in E. \\ f_e & \text{para } e \in \overleftarrow{E}. \end{cases},$$
la cantidad $u^f(e)$ se conoce como la capacidad residual del arco e. Típicamente trabajaremos con la red modificada (G^f_o, u^f, s, t) donde G^f_0 es el subgrafo de $\overleftrightarrow{G}$ con capacidades residuales estrictamente positivas (esta red es la que típicamente se conoce como red o grafo residual asociado a f).
- Para cada flujo factible g en $(\overleftrightarrow{G}, u^f, s, t)$, definimos naturalmente una función $\tilde{g}\colon E \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones de conservación en (G, u, s, t) (pero no necesariamente las de capacidad, pudiendo incluso tomar valores negativos) como sigue:
$$\tilde{g}_e = g_e - g_{\overleftarrow{e}}, \text{para todo } e \in E.$$

Las siguientes propiedades son útil para trabajar con redes residuales.

Lemma 1. *Si g es flujo factible en $(\overleftrightarrow{G}, u^f, s, t)$ entonces $f + \tilde{g}$ es flujo factible en (G, u, s, t). Además el valor de $f + \tilde{g}$ es la suma de los valores de f en (G, u, s, t) y de g en $(\overleftrightarrow{G}, u^f, s, t)$.*

Demostración. Para todo $v \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\delta^+_E(v)) &= g(\delta^+_E(v)) - g(\delta^-_{\overleftarrow{E}}(v)),\\
\tilde{g}(\delta^-_E(v)) &= g(\delta^-_E(v)) - g(\delta^+_{\overleftarrow{E}}(v)),\\
\text{con lo cual } \tilde{g}^{\mathrm{OUT}}(v) &= \tilde{g}(\delta^+_E(v)) - \tilde{g}(\delta^-_E(v)) = (g(\delta^+_E(v)) + g(\delta^+_{\overleftarrow{E}}(v))) - (g(\delta^-_E(v)) + g(\delta^+_{\overleftarrow{E}}(v)))\\
&= g(\delta^+_{\overleftrightarrow{E}}(v)) - g(\delta^-_{\overleftrightarrow{E}}(v)) = g^{\mathrm{OUT}}(v).
\end{aligned}$$

Gracias a esto, $(f+\tilde{g})_G^{\mathrm{OUT}}(v) = f^{\mathrm{OUT}}(v) - \tilde{g}^{\mathrm{OUT}}(v) = f^{\mathrm{OUT}}(v) - g^{\mathrm{OUT}}(v)$ y como f y g son flujos factibles en sus respectivas redes, tenemos que $f+\tilde{g}$ satisface conservación. Por otro lado:

$$\mathrm{valor}_G(f+\tilde{g}) = f^{\mathrm{OUT}}(s) + g^{\mathrm{OUT}}(s) = \mathrm{valor}(f) + \mathrm{valor}(g).$$

Solo falta ver que $f+\tilde{g}$ satisface capacidad. En efecto, si $e \in E$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f_e + \tilde{g}_e &= f_e + g_e - g_{\overleftarrow{e}} \le f_e + g_e \le f_e + u_e^f \le u_e, \\ f_e + \tilde{g}_e &= f_e + g_e - g_{\overleftarrow{e}} \ge f_e - g_{\overleftarrow{e}} \ge 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 2. *Si f y f' son flujos factibles en (G,u,s,t) y valor$(f) \le$ valor(f') entonces existe un flujo factible g en (G_o^f, u^f, s, t) de valor valor(f') − valor(f) tal que $f' = f + \tilde{g}$.*

Demostración. Consideremos el vector $h = f' - f$. Definamos $g\colon \overleftrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ del siguiente modo. Sea $e \in E$. Si $h_e \ge 0$ entonces fijamos $g_{\overleftarrow{e}} := 0$ y $g_e := h_e \le f'_e - f_e \le u_e - f_e = u_e^f$. Si por otro lado $h_e < 0$ entonces fijamos $g_e := 0$ y $g_{\overleftarrow{e}} := -h_e = f_e - f'_e \le f_e = u^f_{\overleftarrow{e}}$.

Del párrafo anterior deducimos que g es un vector que satisface capacidades en la red (G_o^f, u^f, s, t). Por otro lado, para todo $e \in E$, $\tilde{g}_e = g_e - g_{\overleftarrow{e}} = h_e$. De aquí deducimos que $f' = f + \tilde{g}$ y que para todo v, $g_{G_o^f}^{\mathrm{OUT}}(v) = h_G^{\mathrm{OUT}}(v) = f_G^{\mathrm{OUT}}(v) - f'^{\mathrm{OUT}}_G(v)$, con lo que g satisface las condiciones de conservación. Por lo tanteo, g es un flujo factible en (G_o^f, u^f, s, t). □

Gracias a estos lemas deducimos por ejemplo que para todo flujo factible f y todo flujo máximo f^* en (G,u,s,t), el valor de un flujo máximo en (G_o^f, u^f, s, t) es igual al valor de f^* menos el valor de f.