MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Patricio Foncea Araneda y Camilo Iturra Cisternas
Fecha: 21 de Octubre de 2013.

Cátedra 16

1. Redes de Flujo

Comenzaremos con el estudio de problemas de flujos en grafos dirigidos. Supongamos, por ejemplo, que deseamos modelar un sistema de cañerías de agua u otro material. Para ello podemos utilizar un grafo dirigido como el de la figura, el cual posee vértices que denotan puntos de control en la cañería y arcos que representan la dirección del movimiento del agua. Otorgamos a los arcos un valor real llamado *capacidad*, el cual nos dice la cantidad máxima de material que puede ser transportado por esa cañería. El objetivo final es el de encontrar una configuración que nos permita enviar la mayor cantidad de flujo desde el comienzo de la cañería, al final.

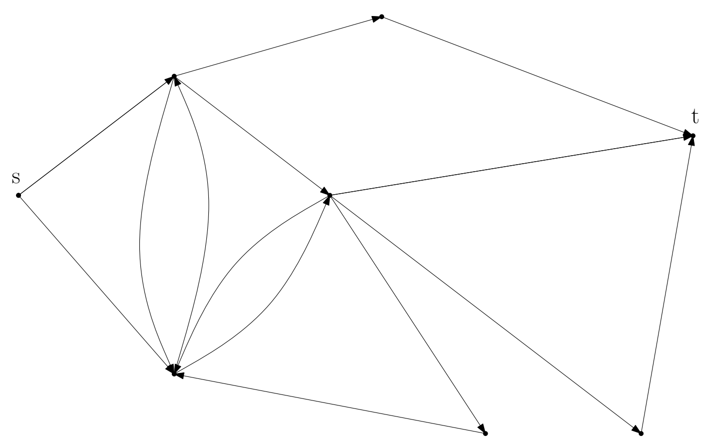

Figura 1: Red de cañerías representadas como un grafo dirigido

1.1. Red

Para modelar correctamente estas situaciones, utilizamos un digrafo $G = (V, E)$ y dotamos a las aristas con una función $u\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la cual llamamos *capacidad*. Además, en V, distinguimos dos vértices s y t, los cuales llamamos origen y destino, respectivamente.

Definición. (Red) Llamamos Red a la 4-tupla (G, u, s, t), donde $G = (V, E)$ es digrafo, $u\colon E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ es una función de capacidad, y $s, t \in V$ (origen y destino respectivamente).

Por lo tanto, el problema anterior puede verse como el de encontrar una asignación a cada arista del digrafo G tal que el flujo que salga de s y llegue a t sea máximo. Para modelar este problema, consideraremos primero un enfoque utilizando programación lineal.
Creamos las variables f_e, $e \in E$, las cuales representan cuanto flujo pasa por el arco e. Con esto en mente, podemos agregar las siguientes restricciones naturales:

- $0 \leq f_e \leq u_e$, $\forall e \in E$.
- $\sum_{e\in\delta^-(v)} f_e = \sum_{e\in\delta^+(v)} f_e$, $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$.

La primera restricción nos dice que el flujo en cada arco debe ser no negativo y no sobrepasar la capacidad de ese arco; la segunda, que el flujo que sale de cada vértice, debe ser igual al flujo que entra.

Definición. **(Flujo Neto)** Llamamos flujo neto a la expresión $f^{\text{neto}} = f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v))$, donde $f(\delta^-(v)) = \sum_{e\in\delta^-(v)} f_e$ y $f(\delta^+(v)) = \sum_{e\in\delta^+(v)} f_e$.

Definición. Denotamos el flujo que entra a un vértice por $f^{\text{IN}} = f^{\text{neto}}$ y el flujo que sale por $f^{\text{OUT}} = -f^{\text{neto}}$.

Tenemos entonces que el problema a resolver es

$$(PL)\begin{cases} \text{máx} & f^{neto}(t) \\ \text{s.a.} & f^{neto}(v) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\ & 0 \le f_e \le u_e \quad \forall e \in E \end{cases}$$

Supuestos y Notación:

- Veremos a futuro que es posible asumir que $f(\delta^+(t)) = f(\delta^-(s)) = 0$.
- No existe un camino de s a t con capacidades infinitas.
- Si f satisface $f^{IN}(v) = 0$, $\forall v \in V \setminus \{s,t\}$ y $0 \le f_e \le u_e$, decimos que f es un flujo factible.
- A las restricciones de (PL) se les llama *restricciones de conservación de flujo.*
- Se define valor$(f) = f^{IN}(t)$.

Teorema 1. *Si f es un flujo factible, entonces:*

1. *valor$(f) = f^{OUT}(s)$.*
2. *$\forall S \subset V$ tal que $s \in S$ y $t \notin S$, valor$(s) = f^{neto}(S) = f(\delta^-(S)) - f(\delta^+(S))$.*

Demostración.

1. Como f es conservativa tenemos que $\forall v \in V \setminus \{s,t\}$ $f^{IN}(v) = 0$, luego:

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V}(f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v))) &= \sum_{v\in V} f^{IN}(v) \\ &= f^{IN}(t) + f^{IN}(s) \\ &= f^{IN}(t) - f^{OUT}(s)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V}(f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v))) &= \sum_{v\in V}\left(\sum_{e\in\delta^-(v)} f_e - \sum_{e\in\delta^+(v)} f_e\right) \\ &= \sum_{v\in V}\sum_{e\in\delta^-(v)} f_e - \sum_{v\in V}\sum_{e\in\delta^+(v)} f_e \\ &= \sum_{e\in E} f_e - \sum_{e\in E} f_e \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{IN}(t) - f^{OUT}(s) = 0$, entonces $valor(f) = f^{OUT}(s)$.

2. Como f es conservativa tenemos que $\forall v \in S - s$ $f^{OUT}(v) = 0$, luego:

$$\begin{aligned}
f^{OUT}(s) &= \sum_{v\in S}(f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v))) \\
&= \sum_{v\in S}\sum_{e\in\delta^+(v)} f_e - \sum_{v\in S}\sum_{e\in\delta^-(v)} f_e \\
&= \sum_{t(e)\in S} f_e - \sum_{h(e)\in S} f_e \\
&= (f(\delta^+(S)) + f(E(S))) - (f(\delta^-(S)) + f(E(S)))\ ;\ \text{donde } E(S) = \{e \in E\colon t(e), h(e) \in S\} \\
&= f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S))
\end{aligned}$$

Luego por la parte 1. $valor(f) = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S))$.

□

Teorema 2. *Si f es factible, entonces $\forall S \subset V$ tal que $s \in S$ y $t \notin S$, $valor(f) \leq u(\delta^+(S))$.*

Demostración. $valor(f) = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S)) \leq f(\delta^+(S)) \leq u(\delta^+(S))$.

□

1.2. Dualidad Débil

Definición. Sea (G, u, s, t) una red y $S \subset V$. Diremos que S es un $s-t$ corte si $s \in S$ y $t \notin S$. Luego, denotamos la capacidad de un $s-t$ corte por $u(\delta^+(S)) = \sum_{e\in\delta^+(S)} u_e$.

Notemos que por el *Teorema* 2 tenemos que

$$\sup_{f \text{ factible}} \text{valor}(f) \leq \min_{S\ s-t \text{ corte}} u(\delta^+(S))$$

Observemos que $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{R}^E \ :\ f\ factible\} \neq \emptyset$ pues $f = 0 \in \mathcal{F}$, además $\mathcal{F}$ es un poliedro acotado de $\mathbb{R}^E$ ya que $u_e < \infty$ $\forall e \in E$, por lo tanto es un compacto, y como $valor(f)$ es lineal tenemos que el supremo es realmente un máximo y la desigualdad de dualidad débil queda

$$\max_{f \text{ factible}} \text{valor}(f) \leq \min_{S\ s-t \text{ corte}} u(\delta^+(S))$$

.

Ejemplo. Podemos ver el problema del matching de cardinalidad máxima en un grafo bipartito $G = (A \cup B, E)$ como un problema de flujo. Basta agregar un nodo s que posea aristas dirigidas a cada vértice en A, con capacidad $u = 1$, y a cada vértice en B, dotarlo con un arco dirigido a un segundo nodo t, también con capacidades $u = 1$. Entregamos además, a cada arista en E, capacidad igual a uno (aunque veremos más adelante que es mejor entregarles el valor ∞).
Vemos que cualquier flujo factible integral induce un matching y viceversa.

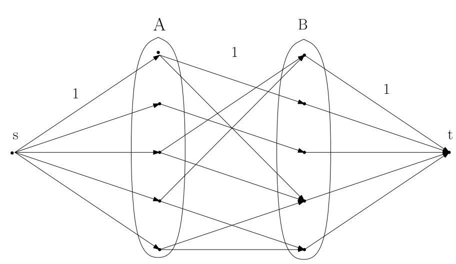

Figura 2: Red definida sobre el grafo bipartito $G = (A \cup B, E)$.

1.3. Resolución del Problema de Flujo Máximo

Para el problema de Flujo Máximo en una red (G, u, s, t), el objetivo es el de encontrar el flujo factible de valor máximo. Supongamos primero que hemos encontrado un flujo factible para la red, ¿cómo podemos aumentar el valor de este flujo?. Una forma es encontrar un $s - t$ camino P con capacidad residual $\text{mín}_{e \in P}(u_e - f_e)$ y mandar dicha cantidad por P.

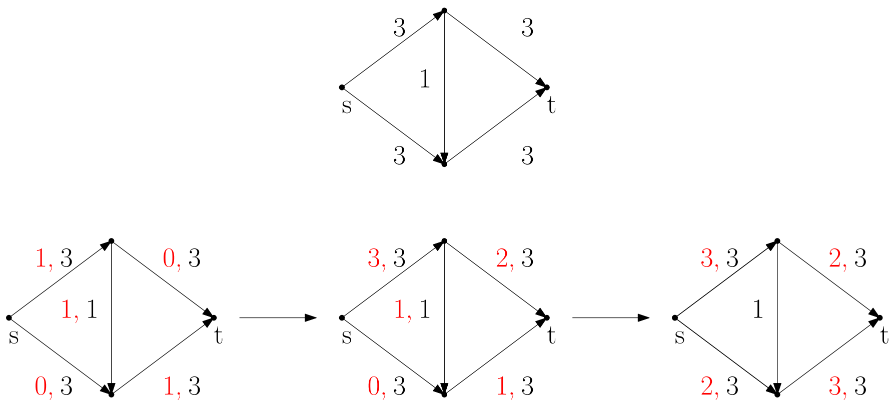

Figura 3: Ejemplo del algoritmo anterior sobre una red de 4 nodos. En cada arco se indica el flujo (en rojo) y la capacidad.

Sin embargo, vemos en la figura 3 que este método no nos asegura obtener un flujo de valor máximo, ya que aplicándolo sobre el grafo del ejemplo, obtenemos un flujo de valor total igual a 5, cuando claramente existe un flujo con valor 6. Otra forma es encontrar un $s - t$ camino P donde los arcos de P no están necesariamente dirigidos como lo dicta el grafo G, luego tratar de mandar flujo por este camino e ir disminuyendo el flujo en los arcos de $P \cap G^{reverso}$. La idea anterior necesita de las siguientes definiciones para formalizarla.

Definición. (Grafo Residual) Dado (G, u, s, t) una red y f factible, definimos la red (G^f, u^f, s, t) como sigue:

- $G^f = (V, E \cup \overleftarrow{E})$.
- $\overleftarrow{E} = \{\overleftarrow{e} : e \in E,\ t(e) = u,\ h(e) = v \Rightarrow t(\overleftarrow{e}) = v,\ h(\overleftarrow{e}) = u\}$.
- $u^f_e = u_e - f_e$
- $u^f_{\overleftarrow{e}} = f_e$

A esta red la llamamos grafo residual.