MA4701. Optimización Combinatorial. 2013.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Juan José Granier y Sélim Cornet.
Fecha: 25 de Octubre de 2013.

Cátedra 17

Recordemos de la clase pasada que nos interesamos en el problema del flujo máximo. Es decir que, en una red (G, u, s, t) donde G es un grafo dirigido, $u : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función de capacidades, s un nodo origen y t un nodo destino, queremos encontrar la manera de enviar la mayor cantidad de material desde s hasta t respetando las capacidades.

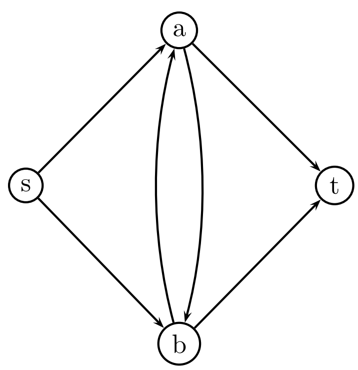
1. Flujos y caminos aumentantes

La meta de esta parte es explicar cómo, dado un flujo factible, se puede encontrar una manera de aumentarlo (si existe). La noción de camino aumentante tiene un papel importante en esto, pero antes de poder definirla tenemos que introducir la red residual.

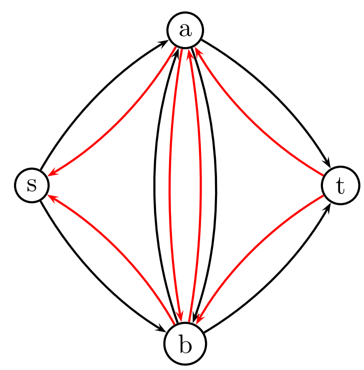
Definición 1. Dado un flujo factible f en una red (G, u, s, t), definimos la red residual (G^f, u^f, s, t) de la siguiente manera:

- $G^f = (V(G), E(G) \cup \overleftarrow{E}(G))$, donde la unión es disjunta, es decir que para cada arco se adjunta el arco reverso, incluso si ya existe otro arco que conecte los mismos nodos.
- $\forall e \in E(G^f), u^f_e = \begin{cases} u_e - f_e & \text{si} \quad e \in E(G) \\ f_e & \text{si} \quad e \in \overleftarrow{E}(G) \end{cases}$

Ejemplo. Veamos con un ejemplo cómo construir la red residual.



Red original.



Red residual. Los arcos agregados son en rojo.

Definición 2. Sea f un flujo factible en una red (G, u, s, t), sea P un (s, t)-camino en G^f. Este camino se dice aumentante si para cada $e \in P$, se tiene $u^f(e) > 0$. Dado un camino aumentante P y d tal que $0 < d \leq \min_{e \in P} u^f_e$, aumentar de d unidades en P significa sumar el vector $x_{d,P} \in \mathbb{R}^{E(G)}$ a f, donde

$$x_{d,P}(e) = \begin{cases} d & \text{si } e \in P \\ -d & \text{si } \overleftarrow{e} \in P \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Lema 1. *El vector $f' = f + x_{d,P}$ sigue definiendo un flujo factible que tiene valor estrictámente mayor que la de f.*

Demostración. Mostremos primero que f' cumple con la condición de capacidades. Sea $e \in E(G)$.

- Si $e \notin P, \overleftarrow{e} \notin P$, entonces $f_e = f'_e$ y $0 \leq f'_e \leq u_e$ ya que f es flujo factible.
- Si $e \in P$, entonces $f'_e = f_e + d$. Como se tiene $\forall e \in P \cap E(G), d \leq u_e - f_e$, también se tiene $0 \leq f'_e \leq u_e$.

- Si $\overleftarrow{e} \in P$, entonces $f'_e = f_e - d \leq u_e$ claramente. Falta probar $f'_e \geq 0$, y eso también se tiene ya que $d \leq f_e$.

Ahora, sea $v \in V \backslash \{s,t\}$, mostremos que $f'^{\text{out}}(v) = f^{\text{out}}(v) + x^{\text{out}}_{d,P}(v) = 0$. Ya se tiene $f^{\text{out}}(v) = 0$.

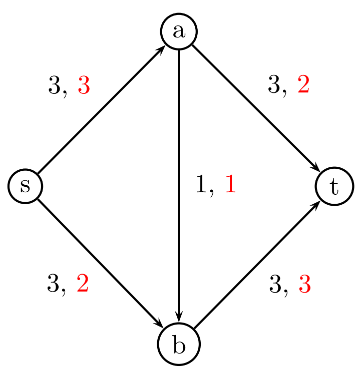
- Si P no toca a v, entonces $x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^+(v)) = x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^-(v)) = 0$ y luego $x^{\text{out}}_{d,P}(v) = x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^+(v)) - x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^-(v)) = 0$.
- Si P toca a v, hay varios casos que examinar.
  1. $\xrightarrow{+d} v \xrightarrow{+d}$ En este caso, $x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^+(v)) = x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^-(v)) = d$ y $x^{\text{out}}_{d,P}(v) = 0$.
  2. $\xrightarrow{+d} v \xleftarrow{-d}$ En este caso, $x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^+(v)) = d - d = 0 = x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^-(v))$ y $x^{\text{out}}_{d,P}(v) = 0$.
  3. $\xleftarrow{-d} v \xleftarrow{-d}$ En este caso, $x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^+(v)) = x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^+(v)) = -d$ y $x^{\text{out}}_{d,P}(v) = 0$.
  4. $\xleftarrow{-d} v \xrightarrow{+d}$ En este caso, $x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^+(v)) = 0 = d - d = x^{\text{out}}_{d,P}(\delta^-(v))$ y $x^{\text{out}}_{d,P}(v) = 0$.

  Así en todos los casos, $x^{\text{out}}_{d,P}(v) = 0$ y luego $f'^{\text{out}}(v) = 0$.

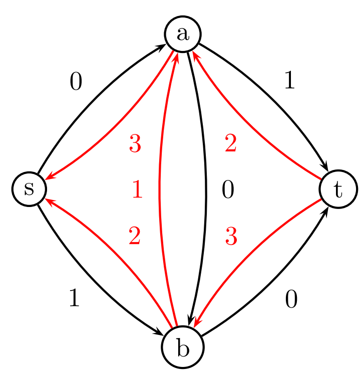
Entonces f' es un flujo factible. Además, valor(f') = valor$(f) + d >$ valor(f) ya que $d > 0$. □

Notemos como consecuencia de este lema que para ver si se puede aumentar el flujo f, basta buscar un (s,t)-camino en G^f que tenga capacidades positivas. Eso se puede lograr quitando los arcos de capacidad menor o igual a 0 de G^f : llamaremos el grafo obtenido G^f_0. Basta ahora buscar un (s,t)-camino en G^f_0, ocupando por ejemplo BFS o DFS. Veamos eso en un ejemplo.

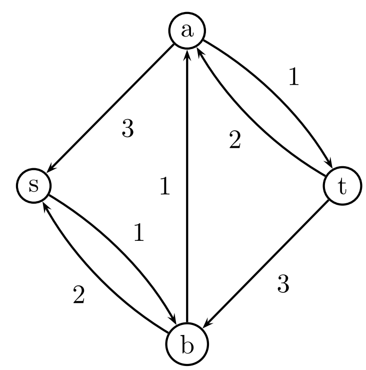
Ejemplo. Consideremos el siguiente grafo, en el que ya tenemos un flujo factible f.



Red original G, con el flujo factible f.



Red residual G^f.



Grafo G^f_0.

Vemos en el grafo G^f_0 que existe un camino aumentante $P = (s,b,a,t)$. Este camino tiene capacidad residual $\min_{e \in P} u^f_e = 1$. Entonces podemos aumentar 1 unidad de flujo en P.

Ahora podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1. *f es un flujo máximo si y solo si no existen caminos aumentantes en (G^f, u^f, s, t).*

Demostración.
$\Rightarrow$: ya vimos por el lema 1 que si existe un camino aumentante en G^f, entonces podemos encontrar un flujo de valor mayor que la de f, entonces f no es máximo.
$\Leftarrow$: Supongamos que no existen caminos aumentantes, es decir que G^f_0 no tiene (s,t)-caminos. Llamemos S el conjunto de los nodos alcanzables desde s en G^f_0, notemos que $t \notin S$. Vamos a calcular la capacidad de S, $u(\delta^+(S))$. Sea $e = uv \in \delta(S)$.

- Si $e \in \delta^+(S), u^f_e = u_e - f_e$ en G^f. Si tuvieramos $u^f_e > 0$, tendriamos $e \in G^f_0$ y $v \in S$, contradicción. Entonces $u^f_e = 0$ y $u_e = f_e$ lo que nos da $u(\delta^+(S)) = f(\delta^+(S))$.

- Si $e \in \delta^-(S), u^f_{\overleftarrow{e}} = f_e$ y de la misma manera, $u^f_{\overleftarrow{e}} = 0$ entonces $f_e = 0$, y $u(\delta^-(S)) = 0$.

Se tiene entonces por el lema 1 $\text{valor}(f) = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S)) = u(\delta^+(S)) - 0 = u(\delta^+(S))$. Además, sabemos por dualidad débil que para cada flujo f'y cada conjunto S' se tiene $\text{valor}(f') \leq u(\delta^+(S))$. Como se tiene la igualdad para f y S, f es flujo máximo y S es corte de capacidad mínima. □

Se puede deducir de la demostración lo siguiente :

Teorema 2 (Flujo máximo y corte mínimo)**.** *Para cada red (G, u, s, t) se tiene*

$$\max_{f \text{ flujo en } G} \text{valor}(f) = \min_{S(s,t)-corte} u(\delta^+(S)).$$

Además S se puede encontrar buscando el conjunto de los nodos alcanzables desde S en G^f_0.

Ahora se puede presentar un algoritmo para encontrar un flujo máximo en una red : el algoritmo de Ford y Fulkerson.

2. Algoritmo de Ford-Fulkerson

La búsqueda de tal algoritmo empezó durante la segunda guerra mundial por razones militares. Uno de los ejércitos estaba recibiendo armas tras una red de puentes, el enemigo buscó cual era la mínima cantidad de puentes a destruir para impedir la llegada del armamiento.

Eso es el algoritmo, publicado por Ford y Fulkerson in 1956:

Algoritmo 1 Algoritmo de Ford-Fulkerson.

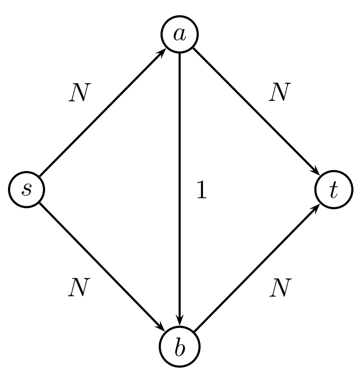
Dado (G, u, s, t) una red.
$f \leftarrow 0$.
Construir (G^f, u^f, s, t) la red residual.
while Existe un camino aumentante P en G^f_0 **do**
  $d \leftarrow \min_{e \in P} u^f_e$
  Aumentar d unidades en P
  Recalcular (G^f, u^f, s, t).
end while
Devolver f.

Observación. Si además se requiere el corte mínimo, se puede modificar el algoritmo para que devuelva también S, el conjunto de los nodos alcanzables desde s en G^f_0.

Teorema 3. *El algoritmo de Ford y Fulkerson es correcto, es decir que si termina, entonces devuelve un flujo máximo.*

El problema es que este algoritmo puede ser muy lento a terminar. Veamos eso en un ejemplo:

Ejemplo.



Aquí N es un entero.
Si en el primer paso, el algoritmo elige aumentar por el camino (s, a, b, t): aumento de 1 unidad de flujo.
Luego puede aumentar de 1 unidad más por (s, b, a, t). Si alterna entre ambos caminos, necesitará $2N$ aumentaciones para llegar al flujo máximo, lo que significa hacer un número de operaciones que es función exponencial del tamaño de la entrada.

Observación.

- Se puede probar que el algoritmo termina si todas las capacidades son racionales (pero puede ser muy lento).
- Es posible que el algoritmo no termine si hay capacidades irracionales, pero eso no puede pasar si se ejecuta el algoritmo con un computador.
- Veremos en la próxima cátedra que existe una manera de encontrar un flujo máximo en pocas iteraciones.

Teorema 4. *Si* (G, u, s, t) *es una red en la que para todo arco* e*,* $u_e \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*, entonces existe un flujo máximo entero, es decir que cumple* $\forall e \in E(G), f_e \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Es directo aplicando Ford-Fulkerson. □