

MA4701-1 - Optimización Combinatorial

Profesor: José Soto

Auxiliares: Nicolás Sanhueza - Christian von Borries



Auxiliar N° 10

24 de octubre de 2013

Resumencito

- **Notación:** Sea $G = (V, E)$ grafo dirigido, $u : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de capacidad de los arcos, s un nodo de origen y t un nodo de destino.
- Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Definimos $f^{\text{in}}(v) = f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v))$ y $f^{\text{out}}(v) = f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v))$.
- Se dice que v conserva el flujo si $f^{\text{in}}(v) = 0$. Esta condición es equivalente a $f(\delta^-(v)) = f(\delta^+(v))$, que se puede interpretar como “lo que entra en el vértice v es igual a lo que sale”.
- Decimos que f es un flujo si:
 - $0 \leq f(e) \leq u(e) \forall e \in E$ (condición de capacidad)
 - $f^{\text{in}}(v) = 0 \forall v \in V \setminus \{s, t\}$ (conservación de flujo)
- El valor del flujo se define como $|f| = f^{\text{out}}(s)$. El problema de flujo es buscar $\max |f|$.
- **Spoilers** Para esta auxiliar tendremos que adelantarles un resultado: Si las capacidades son todas enteras, entonces existe un flujo máximo f con $f(e)$ entero $\forall e \in E$.

P1) Reduzca los siguientes problemas al problema de encontrar un flujo máximo.

- a) Suponga que hay múltiples nodo de origen y de destino y queremos buscar un flujo máximo entre ellos.
- b) Suponga que no solo los arcos sino que también los vértices tienen una función de capacidad. O sea, existe una función $c : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ y buscamos un flujo que además cumpla $f^{\text{in}}(v) \leq c(v)$.

P2) Escriba el problema de flujo máximo como PL. Muestre que el problema dual es una relajación del problema de encontrar un corte que separe s y t de capacidad mínima. (La capacidad de un corte (S, T) es $\sum_{e \in \delta^+(S)} c_e$.)

P3) Sean $d_{v_1}^+, d_{v_2}^+, \dots, d_{v_n}^+$ y $d_{v_1}^-, d_{v_2}^-, \dots, d_{v_n}^-$ una lista de grados de entrada y de salida de los vértices v_1, \dots, v_n respectivamente. Queremos saber si puede existir o no un grafo en esos vértices con esos grados. Muestre que este problema se reduce a encontrar un flujo máximo.

P4) Usted es hincha del club de fútbol Deportivo Independiente Medellín que actualmente está jugando un importante torneo. En este torneo hay P equipos y cada equipo juega con un equipo distinto exactamente M veces. El ganador de un partido se gana dos puntos, mientras que el perdedor no gana nada. En caso de empate, cada equipo gana un punto. El ganador del torneo es el que tiene más puntos. (En caso de haber más de un máximo, no hay ganador.)

El campeonato está muy peleado, actualmente lidera el DCC (Deportivo Colo Colo) y usted quiere saber si su equipo favorito tiene aún alguna posibilidad de salir campeón. Dada una tabla con los resultados de partidos anteriores, determine si aún es posible o no que el Deportivo Independiente Medellín salga campeón, reduciendo el problema a un problema de encontrar flujo máximo.