Complemento:

Estimados, la versión mostrada en cátedra tenía un **error** así que les mando una versión corregida del PTAS para el problema de la mochila. En negrita se marcan los cambios con respecto a lo visto en cátedra.

1 PTAS 1 para Mochila

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de objetos con tamaños $s(a_i) \in \mathbb{Z}^+$ y valores $v(a_i) \in \mathbb{Z}^+$. Sea $B \in \mathbb{Z}^+$ el tamaño de la mochila. Suponemos además que $s(a_i) \leq B$ de otra forma se elimina de la instancia.

Idealmente queremos encontrar el conjunto OPT $\subseteq A$ de objetos tal que OPT cabe en la mochila y $v(\text{OPT})$ es máximo. Como el problema es NP-difícil, nos conformamos con una aproximación.

Sea k un número entero positivo fijo. Considere el algoritmo siguiente.

1. Para cada conjunto $T \subseteq A$ que quepa en la mochila, con $|T| \leq k$, definir solución X_T como:
   - Agregar T en X_T.
   - **Borrar de A todos los elementos con valor mayor que** $\min_{a\in T} v(a)$**.**
   - Ordenar los elementos de $A \setminus T$ de mayor a menor densidad y agregarlos en X_T uno a uno mientras quepan en la mochila, cuando alguno no quepa, parar.
2. Devolver el conjunto X_T de mayor valor de entre los encontrados.

En lo anterior, la densidad de un objeto a_i es $v(a_i)/s(a_i)$.

Lema 1. *El algoritmo anterior devuelve X_T tal que $v(X_T) \geq v(OPT)\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.*

Proof. Sea OPT el conjunto factible óptimo. Si $|\text{OPT}| \leq k$ entonces el algoritmo considera $X_{\text{OPT}} = \text{OPT}$ entre sus candidatos y luego devuelve el óptimo. Así que supongamos que $|\text{OPT}| \geq k + 1$.

Sea T el conjunto de los k elementos **más valiosos** de OPT. Ordenemos ahora $\text{OPT} \setminus T = \{o_1, \ldots, o_{\ell-k}\}$ de mayor a menor densidad. Queremos comparar $v(\text{OPT})$ con $v(X_T)$. Para ello, sea m el primer índice tal que o_m no está en X_T.

Observaciones

1. Como o_m no está en X_T. Todos los objetos de $X_T \setminus T$ tienen densidad al menos $v(o_m)/s(o_m)$.
2. Sea ahora $B' = B - s(X_T)$ el espacio vacío que queda en la mochila al considerar el conjunto X_T. Recordemos que cuando glotón estaba incluyendo elementos en X_T, o_m no fue incluido. Esto quiere decir que algún elemento, digamos a^* de densidad mayor o igual a la de o_m (que puede estar en $A \setminus \text{OPT}$) no cupo en B'. En otras palabras

$$B' < s(a) = \frac{s(a)}{v(a)}v(a) \leq \frac{s(o_m)}{v(o_m)}v(a^*) \leq \frac{s(o_m)}{v(o_m)} \min_{a\in T} v(a) \leq \frac{s(o_m)}{v(o_m)} \frac{v(\text{OPT})}{k}.$$

   La penúltima desigualdad sale del hecho que **eliminamos de A todos los objetos de valor mayor a** $\min_{a\in T} v(a)$.

De las observaciones anteriores y usando que $X_T \setminus T \subseteq X_T \setminus \text{OPT}$ tenemos:

$$\begin{aligned} v(X_T \setminus \text{OPT}) &\geq \frac{v(o_m)}{s(o_m)} \cdot s(X_T \setminus \text{OPT}) \\ &= \frac{v(o_m)}{s(o_m)} \cdot (B - s(X_T \cap \text{OPT}) - B') \\ &\geq \frac{v(o_m)}{s(o_m)} \cdot (s(\text{OPT} \setminus X_T) - B') \\ &\geq \frac{v(o_m)}{s(o_m)} \left(s(\text{OPT} \setminus X_T) - \frac{s(o_m)}{v(o_m)} \frac{v(\text{OPT})}{k} \right) \\ &\geq \frac{v(o_m)}{s(o_m)} \cdot s(\text{OPT} \setminus X_T) - \frac{v(\text{OPT})}{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Usando que todos los elementos de $\text{OPT} \setminus X_T$ tienen densidad a lo más $v(o_m)/s(o_m)$ concluimos que:

$$\begin{aligned} v(\text{OPT}) &= v(X_T \cap \text{OPT}) + v(\text{OPT} \setminus X_T) \\ &= v(X_T) - v(X_T \setminus \text{OPT}) + \sum_{i=m}^{\ell} \frac{v(o_i)}{s(o_i)} s(o_i) \\ &\overset{(1)}{\leq} v(X_T) - \left(s(\text{OPT} \setminus X_T) \frac{v(o_m)}{s(o_m)} - \frac{v(\text{OPT})}{k} \right) + s(\text{OPT} \setminus X_H) \cdot \frac{v(o_m)}{s(o_m)} \\ &= v(X_T) + \frac{v(\text{OPT})}{k}. \end{aligned}$$

Esto termina la demostración del lema. $\square$

De aquí se deduce que para $\epsilon > 0$ basta elegir $k = \frac{1}{\varepsilon}$ para lograr una $(1 - \varepsilon)$ aproximación, que corre en tiempo $O(kn^{k+1}) = O\left(\frac{1}{\varepsilon} n^{1+1/\varepsilon}\right)$. Es decir, tenemos un esquema de aproximación a tiempo polinomial (PTAS) para el problema de la mochila.