Técnicas de Integración

Índice

Capítulo único: Técnicas de Integración

1. Integración Directa 3

2. Integración por Sustitución 4

3. Integración por Partes 5

4. Sustitución Trigonométrica 6

5. Integración de Funciones Racionales. Fracciones Parciales 8

6. Integrales que producen Funciones Trigonométricas Inversas 9

7. Sustitución recíproca 9

8. Problemas resueltos de Integración Definida y Doble 10

Técnicas de Integración

1. Integración Directa

De cada regla de derivación se puede deducir una regla correspondiente de integración. La integración directa es aplicable cuando identificamos la función primitiva de forma inmediata. Esto es, cuando conocemos la regla de diferenciación que al aplicarla nos permite hallar el integrando a partir de la función primitiva.

Ejemplo: $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + k \ \because\ \left(x^2+k\right)' = 2x,\ k \in \mathbb{R}.$

Propiedades Fundamentales de la Antidiferenciación

1. $\displaystyle\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$, k es una constante.
2. Si f_1 y f_2 están definidas en el mismo intervalo, entonces

$$\boxed{\int \Big[f_1(x) \pm f_2(x)\Big]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx}$$

3. $\displaystyle\int dx = x + k$, donde k es la constante de integración.
4. Si $n \in \mathbb{Q}$ y $n \neq -1$, entonces

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k}$$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k.$
6. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + k.$
7. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k.$
8. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k.$
9. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + k.$
10. $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x\,dx.$
11. $\displaystyle\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + k.$
12. $\displaystyle\int \csc x \cot x\,dx = -\cot x + k.$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + k.$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k.$

Ejercicios resueltos

Efectúe las operaciones de antidiferenciación que se indican aplicando las propiedades pertinentes en cada caso.

1. $\displaystyle\int (3x+4)\,dx = \int 3x\,dx + \int 4\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 4x + k.$

2. $\displaystyle\int (\cos x - 5\operatorname{sen} x - 7)\,dx = \int \cos x\,dx - 5\int \operatorname{sen} x\,dx - 7\int dx = \operatorname{sen} x + 5\cos x - 7x + k.$

3. $\displaystyle\int \frac{9+3x^2-8x^4}{3x^3}\,dx = 3\int x^{-3}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{8}{3}\int x\,dx = -\frac{3}{2x^2} + \ln|x| - \frac{4}{3}x^2 + k.$

4. $\displaystyle\int (x-3)\sqrt{x}\,dx = \int x^{3/2}\,dx - 3\int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - 2x^{3/2} + k.$

5. Trabajaremos el integrando con la única intención de simplificar:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x + \cot x}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}}\,dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\,dx \\
&= -\cos x + k.
\end{aligned}$$

2. Integración por Sustitución

En muchas ocasiones, cuando la integración directa no es tan obvia, es posible resolver la integral simplemente con hacer un cambio de variable adecuado. Este procedimiento se conoce como *integración por sustitución*.

Ejercicios resueltos

En los siguientes ejercicios resuelva la integral que se indica.

1. $\displaystyle\int \sqrt{4x-1}\,dx.$

Efectuamos una sustitución definida por $u = \sqrt{4x-1}$, diferenciando $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{4x-1}} \therefore dx = \dfrac{u}{2}\,du$. Efectuamos las sustituciones pertinentes y obtenemos

$$\int \sqrt{4x-1}\,dx = \int u \cdot \frac{u}{2}\,du = \frac{1}{6}u^3 + k.$$

Deshacemos el cambio inicial, entonces $\displaystyle\int \sqrt{4x-1}\,dx = \frac{(4x-1)^{3/2}}{6} + k$. (Compruebe diferenciando el resultado obtenido, deberá reproducir el integrando.)

2. $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$.

Realizamos la sustitución de la siguiente manera: sea $u = \sqrt{x+1} \implies u^2 = x+1$, luego $2u\,du = dx$. Además $x = u^2 - 1$, finalmente

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = 2\int \left(u^2-1\right) u \cdot u\,du = 2\left(\int u^4\,du - \int u^2\,du\right) = 2\left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3\right) + k.$$

Deshaciendo el cambio se concluye lo pedido.

3. $\displaystyle\int \sec x\,dx$.

Amplificando convenientemente el integrando por $\dfrac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$, se tiene

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx,$$

entonces definiendo $u = \sec x + \operatorname{tg} x$ tendremos

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + k = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k.$$

4. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$.

Siendo $u = x^2+x+1 \implies \displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln\left(x^2+x+1\right) + k$. Antes de continuar, vale la pena mencionar una propiedad bastante útil, y establece que $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + k$ con $f(x) \neq 0$. (Su demostración es sencilla y se deja como ejercicio al lector.) La omisión de las barras de valor absoluto de debe a que $x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (Su demostración se deja también como ejercicio.)

3. Integración por Partes

La fórmula para la "integración por partes"se deduce a partir de la regla de un producto de funciones. (Visualice su demostración aquí.)

Sean f y g funciones diferenciables, entonces

$$\begin{aligned}
\Big[f(x)\cdot g(x)\Big]' &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) && \text{(Derivada de un producto de funciones)}\\
f(x)\cdot g'(x) &= \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]' - f'(x)\cdot g(x) && \text{(Reescribiendo)}\\
\int f(x)\cdot g'(x)\,dx &= f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx && \text{(Integrando)}
\end{aligned}$$

Definamos $u = f(x) \implies du = f'(x)\,dx$ y $v = g(x) \implies dv = g'(x)\,dx$, obtenemos

$$\boxed{\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du}$$

Ejercicios resueltos

En siguientes ejercicios evalúe la integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \ln x\,dx.$

Sean $u = \ln x$ y $dv = dx$. Entonces $du = \dfrac{1}{x}\,dx$ y $v = x$. Integrando por partes:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + k.$$

2. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx.$

Antes de integrar por partes, modifiquemos el integrando haciendo $\varphi^2 = x \implies dx = 2\varphi\,d\varphi$, entonces $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\int \varphi\cos\varphi\,d\varphi$. Integrando por partes con $u = \varphi$ y $dv = \cos\varphi\,d\varphi$

$$\int \varphi\cos\varphi\,d\varphi = \varphi\operatorname{sen}\varphi - \int \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = \varphi\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi + k_1.$$

Duplicando esto último y deshaciendo el cambio inicial obtenemos lo pedido.

3. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx.$

Reescribir el integrando como $\cos x\cos x$ e integrando por partes con $u = \cos x$, $dv = \cos x\,dx$ resulta

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x\cos x + x) + k.$$

La resolución de esta integral también puede acortarse, pues de la fórmula para el coseno del ángulo doble tenemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$. En donde podemos hacer a $\cos^2 x$ el sujeto de la fórmula y reemplazarlo en la integral original. Los cálculos se reducen a integrar por sustitución.

4. Sustitución Trigonométrica

A menudo es posible hallar la antiderivada de una función cuando el integrando presenta expresiones de la forma

$$\sqrt{a^2 - u^2},\ \sqrt{a^2 + u^2} \text{ ó bien } \sqrt{u^2 - a^2},\ \text{donde } a > 0 \text{ y } u \text{ es una función de } x.$$

Se elimina la raíz efectuando la sustitución trigonométrica partinente; el resultado es un integrando que contiene funciones trigonométricas cuya integración nos es familiar. A continuación las sustituciones trigonométricas para los casos pertinentes:

- Expresión en el integrando $\sqrt{a^2 - u^2}$. Sustitución trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\varphi$.

- Expresión en el integrando $\sqrt{a^2+u^2}$. Sustitución trigonométrica $x = a\operatorname{tg}\varphi$.
- Expresión en el integrando $\sqrt{u^2-a^2}$. Sustitución trigonométrica $x = a\sec\varphi$.

Ejercicios resueltos

En los siguientes ejercicios obtenga la integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

La cantidad subradical es de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, por lo que la sustitución adecuada debe ser

$$x = 2\operatorname{sen}\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \implies dx = 2\cos\varphi\,d\varphi.$$

De tal manera que

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{2\cos\varphi}{4\operatorname{sen}^2\varphi\sqrt{4-4\cos^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{4}\int \csc^2\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{4}\cot\varphi + k.$$

De la sustitución inicial se tiene que $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{x}{2}$. De esta razón podemos identificar como x al cateto opuesto de un triángulo rectángulo y a 2 la hipotenusa del mismo. (Según la definición de seno.) Entonces de acuerdo al Teorema de Pitágoras el cateto adyacente es $\sqrt{4-x^2}$. Como cotangente es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto, finalmente

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + k.$$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx.$

El integrando se ve afectado por una expresión que posee la forma $\sqrt{a^2+u^2}$, entonces la sustitución adecuada es

$$x^2 = \operatorname{tg}\varphi,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \implies d\varphi = \frac{2x}{1+x^4}\,dx.$$

Se tendrá que

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int d\varphi = \frac{1}{2}\varphi + k = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + k.$$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx.$ Definamos

$$x = \sec\varphi,\ 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ ó } \pi \le \varphi < \frac{3}{2}\pi \implies dx = \sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi.$$

Aplicando las sustituciones respectivas

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi}{\sec^2\varphi - 1}\,d\varphi = \int \csc\varphi\,d\varphi = \ln|\csc\varphi - \cot\varphi| + k.$$

Esto último pues, amplificando la última integral por $\dfrac{\csc\varphi - \cot\varphi}{\csc\varphi - \cot\varphi}$ la conclusión sigue. Acorde a la sustitución inicial tendremos finalmente que

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right| + k = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + k.$$

Existe otro tipo de sustitución trigonométrica cuando se posee un integrando en términos de funciones trigonométricas, ya sean senos o cosenos. Este cambio de variable se denomina Sustitución Weierstrass y veremos una aplicación de ésta a continuación.

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx.$

Definamos $x = 2\operatorname{arctg} u \implies dx = \dfrac{2}{1+u^2}\,du$. Reescribiendo la sustitución inicial como $u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ podemos inferir que $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1+u^2}$. De la fórmula para el coseno del ángulo doble tenemos que $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$. Hacemos $\varphi = \dfrac{x}{2}$ y felizmente obtenemos a la función seno y coseno en términos de u

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \implies \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Teniendo todo lo necesario, procedemos a efectuar las sustituciones correspondientes, por tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx &= 2\int \frac{\dfrac{2u}{1+u^2}}{1+\dfrac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= 2\int \frac{2u}{(1+u)^2\,(1+u^2)}\,du \\
&= 2\int \frac{(1+u)^2-\left(1+u^2\right)}{(1+u)^2\,(1+u^2)}\,du \\
&= 2\left(\int \frac{1}{1+u^2}\,du - \int \frac{1}{(1+u)^2}\,du\right) \\
&= 2\left(\operatorname{arctg} u + \frac{1}{1+u}\right) + k. \\
&= x + \frac{2}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1} + k.
\end{aligned}$$

(Otra solución es amplificar el integrando por $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$.)

5. Integración de Funciones Racionales. Fracciones Parciales

En este apartado, nos limitaremos a realizar el proceso de “fracciones parciales”. Para visualizar el contenido, haga clic aquí.

6. Integrales que producen Funciones Trigonométricas Inversas

Como ya se dijo antes, de cada fórmula de derivación se deduce una fórmula correspondiente de integración. De las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, obtenemos las integrales más comunes

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}+k,\ a>0 \text{ y } \int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+k,\ a>0.}$$

Ejercicios resueltos

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$

   $$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = 4\int \frac{1}{4x^2+4x+4}\,dx = 4\int \frac{1}{(2x+1)^2+3}\,dx.$$

   Después de definir $u=2x+1$ queda una integral cuya primitiva es un arcotangente.

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx.$

   Primero hagamos $u=\ln x \implies du = \frac{1}{x}\,dx$, luego la integral queda

   $$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{arcsen} u + k = \operatorname{arcsen}(\ln x)+k.$$

7. Sustitución recíproca

Una sustitución recíproca puede convertir una integral en otra muy sencilla de resolver, por ejemplo considérese $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$. La tentación es completar el cuadrado de binomio en la cantidad subradical y luego efectuar una cierta sustitución trigonométrica. ¿Qué tal si definimos $x=\dfrac{1}{u}$? Tendríamos que $dx=-\dfrac{1}{u^2}\,du$, y efectuando los reemplazos correspondientes se sigue que

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = -\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}}}\cdot\frac{1}{u^2}\,du = -\int \frac{1}{u\sqrt{u-1}}\,du.$$

Hemos obtenido una integral más simple y la acabamos efectuando $v^2=u-1$, por tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = -2\int \frac{1}{v^2+1}\,dv = -2\operatorname{arctg} v + k = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+k.$$

También $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$ puede ser convertida en una integral muy sencilla al realizar una sustitución recíproca, y también $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$, etc.

Por supuesto cabe destacar que esta técnica no siempre es eficiente, habrán veces en la cual al realizarla puede incluso reproducir la misma función que se desea integrar, lo cual no trae ninguna ventaja.

8. Problemas resueltos de Integración Definida y Doble

En muchas ocasiones, nos es imposible hallar una primitiva para una cierta función. Pero no es un problema. Uno puede tomar ventaja de una integral definida y efectuando sustituciones claves podemos obtener el resultado. Análogamente podemos resolver integrales insertando parámetros para crear integrales dobles con el único de fin de efectuar el cambio de orden de integración correspondiente.

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\operatorname{sen}^3\varphi - \cos^3\varphi - \cos^2\varphi\right)\left(\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi\right)^{2007}}{\operatorname{sen}^{2009}\varphi\cos^{2009}\varphi}\,d\varphi.$

Probablemente esta integral se ve terrible pero en realidad cae rápido. Sea k el valor de la integral, entonces

$$\begin{aligned}
k &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi\right)^{2007}}{(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)^{2007}} \cdot \frac{\left(\operatorname{sen}^3\varphi - \cos^3\varphi - \cos^2\varphi\right)}{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi}\,d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)^{2007}\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\right)d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)^{2007}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)'d\varphi \\
&= \frac{1}{2008}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)^{2008}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2008}\left[\left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2008} - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1\right)^{2008}\right] \\
&= \frac{1}{2008}\left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^{2008} - \left(2\sqrt{2} + 1\right)^{2008}\right].
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

Reescribamos $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = -\int_1^0 \ln x\,dx$; además $\displaystyle\ln x = \int_1^x \frac{1}{u}\,du$. Vamos a introducir este parámetro para construir una integral doble y posterior a ello efectuar el cambio de orden de integración correspondiente. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x\,dx &= -\int_1^0\int_1^x \frac{1}{u}\,du\,dx \\
&= -\int_1^0\int_u^0 \frac{1}{u}\,dx\,du \\
&= \int_1^0 du \\
&= -1.
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \Big\{x - \ln\left(e^x - 1\right)\Big\}\,dx.$

Definiendo $x = -\ln(1-u)$ lo anterior es equivalente a integrar $\displaystyle -\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,du$. Una sustitución más definida por $v = 1-u$ conduce a integrar $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(1-v)}{v}\,dv$. Además

$$-\ln(1-v) = \int_0^v \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^v t^k\,dt\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^{k+1}}{k+1}.$$

Finalmente

$$\int_0^1 \frac{-\ln(1-v)}{v}\,dv = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\int_0^1 v^k\,dv\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(La demostración de la última suma estará pendiente por algunos momentos.)

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3x}-e^{-7x}}{x}\,dx.$

La clave para resolver esta integral, es notar que $\displaystyle\frac{e^{-3x}-e^{-7x}}{x} = \int_3^7 e^{-ux}\,du$. Entonces insertando este parámetro y revirtiendo el orden de integración queda

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3x}-e^{-7x}}{x}\,dx = \int_3^7\int_0^\infty e^{-ux}\,dx\,du = \ln u\Big|_3^7 = \ln\frac{7}{3}.$$

5. $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+n}$, $-2 < x < 1$.

Usando el hecho de que $\displaystyle e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ y $\displaystyle (m+n)! = \int_0^\infty u^{m+n}e^{-u}\,du$, tendremos

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+n} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+n}\left(\int_0^\infty u^{m+n}e^{-u}\,du\right)\\
&= \int_0^\infty\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{ux}{2}\right)^{m}\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ux}{2}\right)^{n}\right\}e^{-u}\,du\\
&= \int_0^\infty e^{ux-u}\,du = \int_0^\infty e^{-u(1-x)}\,du\\
&= \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\sqrt{y}\cdot\operatorname{sen}^2 x}}.$

La clave para resolver esta integral doble, es primero definir $x = \varphi$ e $y = r^4$, después de esto aplicamos Fubini y por último cambiamos de coordenadas polares a las rectangulares. Se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\sqrt{y}\cdot\operatorname{sen}^2 x}} &= 4\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{\sqrt{1-y^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,d\varphi\,dr\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1-y^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\cdot r\,dr\,d\varphi,
\end{aligned}$$

así que

$$4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy = \frac{4}{3}\int_0^1\left(2y^2+1\right)\,dy = \frac{20}{9}.$$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$, $|a| < 1$.

Notando que $\displaystyle\frac{a^{2k+1}}{2k+1} = \int_0^a u^{2k}\, du$, tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1} = \int_0^a \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(u^2\right)^k \right\} du = \int_0^a \frac{1}{1-u^2}\, du = \operatorname{arctgh} a.$$

8 $\quad \displaystyle\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_0^1 x^{k-1} y^{k-1}\, dx\, dy \right) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (xy)^{k-1} \right\} dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\, dy}{1-xy}.
\end{aligned}$$

En donde se tiene un cuadrado con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Efectuamos las sustituciones $(u,v) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y-x}{2} \right)$ tal que $(x,y) = (u-v, u+v)$. Por tanto

$$\zeta(2) = 2 \iint_S \frac{du\, dv}{1-u^2+v^2}$$

donde S es el nuevo cuadrado con vértices $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $(1,0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Separando este cuadrado en dos triángulos y aprovechándonos de la simetría se tiene

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{dv\, du}{1-u^2+v^2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{dv\, du}{1-u^2+v^2} \right) \\
&= 4 \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arcsen} u}{\sqrt{1-u^2}}\, du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arcsen} u}{2} \right) du \right\} \\
&= 4 \left\{ \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^2}{36} \right\} \\
&= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$