FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002 / Cálculo Diferencial e Integral
Semestre Otoño 2014

Auxiliar 9

Profesor: Raúl Uribe S.

Auxiliares: Néstor Jofré M., Patricio Santis T.

04 de Junio de 2014

Problema 1

Una hormiga se mueve por el manto de un cilindro de radio 1, de tal manera que la altura z y el ángulo θ cumplen la siguiente relación: $z(\theta) = -\ln(1-\theta^2)$. Determine la distancia recorrida por la hormiga cuando está a una altura $h = \ln(4/3)$. Considere que la hormiga parte de $\theta_0 = 0$.

Problema 2

Sea una curva Γ que se obtiene por la intersección de la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2+y^2-2ay = 0$, donde $a > 0$.

a) Encuentre una parametrización $\overrightarrow{r}(t)$ para Γ.

b) Si Γ es un alambre de densidad de masa $\rho(x,y,z) = \dfrac{2a}{\sqrt{8a^2-x^2-y^2}}$. Calcular la masa del alambre.

Problema 3

Considere la curva definida por la parametrización $\overrightarrow{r}(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), e^{-t})$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Demuestre que la curva esta contenida en el cono de ecuación $x^2+y^2 = z^2$.

b) Demuestre que en cada punto de la curva, el vector tangente forma un ángulo constante con el vector $\dfrac{\overrightarrow{r}(t)}{||\overrightarrow{r}(t)||}$.

c) Calcule los vectores $\widehat{N}(t)$, $\widehat{B}(t)$, la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$.

Problema 4

Hallar la masa total de un alambre en V cuya forma está definida por la curva $y = |x|$, donde $x \in [-1, 1]$ y la densidad de masa en cada punto está dada por el valor absoluto del producto de las coordenadas del punto del plano. Encuentre su centro de masa.

Problema 5

La curva en $\mathbb{R}^3$ de parametrizacion $\overrightarrow{r}(t) = (\sin^2(t), \sin(t)\cos(t), \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, pasa dos veces por el punto $(1, 0, 0)$. Demuestre que las dos tangentes en ese punto son perpendiculares.

★ Propuestos

$\boxed{\text{P1}}$ Probar que las órbitas de los planetas son planas. ¿Qué ocurre con la torsión si una curva es plana? **Indicación**: Use $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ y que la fuerza gravitatoria es $\overrightarrow{F} = -C\dfrac{\overrightarrow{r}}{||\overrightarrow{r}||^3}$. Con C constante, $\overrightarrow{r}(t)$ órbita.

$\boxed{\text{P2}}$ Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_1^t \frac{\cos u}{u} du \\ \displaystyle\int_1^t \frac{\sin u}{u} du \end{pmatrix}$, $t \in [1, t_0]$.

Calcule el largo de la curva entre $t \in [1, t_0]$, sabiendo que $t = t_0$ es el primer instante mayor a 1, donde el vector tangente a la curva es vertical.

Saber no es suficiente, debemos aplicar. Querer no es suficiente, debemos hacer.