FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002 / Cálculo Diferencial e Integral
Semestre Otoño 2014

Auxiliar extra C3: Pt. 2

Profesor: Raúl Uribe S.

Auxiliares: Néstor Jofré M., Patricio Santis T.

17 de Junio de 2014

Problema 1

Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_1^t \frac{\cos u}{u} du \\ \displaystyle\int_1^t \frac{\sin u}{u} du \end{pmatrix}$, $t \in [1, t_0]$.

Calcule el largo de la curva entre $t \in [1, t_0]$, sabiendo que $t = t_0$ es el primer instante mayor a 1, donde el vector tangente a la curva es vertical.

Problema 2

Mostrar que la curva Γ parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = (e^{-t}\sin(t), e^{-t}\cos(t), e^{-t}),\ t \in [0, +\infty[$ es una curva regular.

Problema 3

Sea g una función continua en $\mathbb{R}$. Sea C una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$ por

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\int_0^t g(u)du, \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{t^2} g(u)du, \frac{1}{3} \int_0^{t^3} g(u)du \right)$$

Calcule el vector velocidad, rapidez y la tangente.

Problema 4

Una partícula recorre sobre la curva γ definida por $\overrightarrow{r}(t) = (3\sin(t), 4t, 3\cos(t)),\ t \in [0, +\infty[$, partiendo desde $t = 0$.

a) Determine el instante en que la partícula ha recorrido por γ una distancia de $s = 5$ unidades y cuál es su posición en ese instante.

b) Calcular, para todo $t \in [0, +\infty[$, $T(t)$, $N(t)$ y $\kappa(t)$.

Problema 5

Sea $\sigma : [0, l_0] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva Γ. Supondremos que $\sigma \in C^3$. Se pide

a) Probar que: $\tau(s) = \dfrac{(\sigma'(s) \times \sigma''(s)) \cdot \sigma'''(s)}{||\sigma''(s)||^2}$, donde $\tau(s)$ es la torsión de Γ.

b) Use lo anterior para calcular la torsión de la hélice $\overrightarrow{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$, con $t \in [0, 4\pi]$.

Problema 6

Sea una curva Γ que cumple con que existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales de Γ. Se define $P_0 = \overrightarrow{\sigma}(s) + \phi(s)\widehat{N}(s)$, donde $\overrightarrow{\sigma}(s)$ es la parametrización en longitud de arco de la curva Γ, $\widehat{N}(s)$ es el vector normal de la curva Γ y $\phi : [0, l_0] \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^1$. Demuestre que $\kappa(s) = 1$, $\tau(s)\phi(s) = 0$ y $\phi'(s) = 0$, donde $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y torsión de la curva Γ. Concluya que Γ es una curva plana.

★ Propuestos

$\boxed{\text{P1}}$ Se tiene una curva regular $\overrightarrow{r}(s)$ parametrizada por longitud de arco, con curvatura $\kappa(s)$ y torsión $\tau(s)$ definidas en $\mathbb{R}^3$. Determinar la curvatura de $\overrightarrow{r}'(s)$.
Hint: Podría serle útil aplicar el triedro de Frenet.

Nosotros debemos ser el cambio que deseamos ver en el mundo.