MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 24 de Marzo 2014

Auxiliar 2 - Teoría de Conjuntos

P1 - Manipulaciones básicas

Sea U el conjunto universo, sean A, B, C tres conjuntos.

1. Demostrar las proposiciones siguientes :

$$(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \qquad \text{y} \qquad (C \subseteq A) \wedge (C \subseteq B) \Rightarrow C \subseteq A \cap B$$

2. Demostrar que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

3. Demostrar que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c$.

P2 - Conjunto potencia (Control 1 - Años 2005 y 2012)

Sea U el conjunto universo, sean A, B dos conjuntos.

1. Probar que $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

2. Probar que $\varnothing \notin \mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)$.

3. Demostrar que $\mathcal{P}(A \backslash B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

4. Encontrar unos conjuntos A, B tales que la inclusión precedente sea estricta.

P3 - Diferencia simétrica (Control 1 - Año 2000)

Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U. Denotamos $C = (A \cup B)^c$. Probar que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

P4 - Producto cartesiano

1. Consideremos $\mathbb{R}$ como el conjunto universo, sean los intervalos $E = [-1, 4], F = [0, 6]$.

   a) Hacer un dibujo para representar el conjunto $E \times F$.

   b) Definimos $A = [0, 3]$ y $B = [1, 2]$. Agregar al dibujo unas representaciones de los conjuntos $(E \times F) \backslash (A \times B)$ y de $(E \backslash A) \times (F \backslash B)$. ¿Que concluimos?

2. Probar ahora que para cualesquiera conjuntos E, F y cualesquiera conjuntos $A \in \mathcal{P}(E), B \in \mathcal{P}(F)$ se tiene la igualdad :

$$(E \times F) \backslash (A \times B) = ((E \backslash A) \times F) \cup (E \times (F \backslash B)).$$

P5 - Una ecuación con conjuntos

Sea U el conjunto universo, sean $A, B \in \mathcal{P}(U)$. Consideremos la ecuación $A \cup X = B$ cuya incógnita es $X \in \mathcal{P}(U)$.

1. Demostrar que esta ecuación tiene solución si y solo si se tiene $A \subseteq B$. De ahora en adelante supongamos que se cumple esta condición.

2. Hacer un dibujo para conjeturar cual es el conjunto de las soluciones de la ecuación.

3. Demostrar la conjetura.