MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 27 de Marzo 2014

Material Extra: "El poder de la Diferencia Simétrica"

A continuación veremos el poder que esconde esta operación, que a simple vista, no parecer tener mucha utilidad.

Se tienen las siguientes versiones conocidas, de la diferencia simétrica:

- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Ahora veamos, cuáles son esas propiedades que hacen esta operación tan especial:
Sean A, B, $C \in \mathcal{P}(U)$. Entonces:

(i) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (Asociatividad)

(ii) $A \triangle \phi = \phi \triangle A = A$ (Elemento Neutro)

(iii) $A \triangle A = \phi$ (Elemento Inverso)

(iv) $A \triangle B = B \triangle A$ (Conmutatividad)

Al par $(\mathcal{P}(U), \triangle)$ junto a las propiedadades (i), (ii) y (iii), se les suele llamar en Matemáticas un Grupo. Si se le suma la propiedad (iv), se dice que $(\mathcal{P}(U), \triangle)$ es un Grupo Abeliano. Por el momento no nos importará mucho estas definiciones (lo verán en la semana 10 del curso), pero lo que si nos importará son las consecuencias de ella.

Demostremos algunas propiedades y usos de esta operación especial:

1. **Propiedad Cancelativa**
   $A \triangle X = A \triangle Y \implies X = Y$
   Demostración:

$$\begin{aligned}
A \triangle X &= A \triangle Y & \\
\implies A \triangle (A \triangle X) &= A \triangle (A \triangle Y) & \text{Aplicando por la izquierda } A\triangle \\
\iff (A \triangle A) \triangle X &= (A \triangle A) \triangle Y & \text{Asociatividad de } \triangle \\
\iff \phi \triangle X &= \phi \triangle Y & \text{Elemento inverso } \triangle \\
\iff X &= Y & \text{Elemento neutro } \triangle
\end{aligned}$$

2. **Aplicación**
   Sea A un subconjunto **fijo** del conjunto universo U. Probar que $\forall\, X, Y \subseteq U$ se tiene que

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \implies X = Y$$

Demostración:
La primera pregunta que nos hacemos, es que hace este problema aquí, en un principio no tiene ninguna relación con la diferencia simétrica, pero notemos que en nuestras definiciones de $\triangle$ hay una que tiene relación con uniones e intersecciones ($A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$), que es justo lo que nos están dando como hipótesis, con esto mente tenemos que:

$$\begin{aligned}
A \triangle X &= (X \cup A) \setminus (X \cap A) && \text{Definición de } \triangle \\
&= (Y \cup A) \setminus (Y \cap A) && \text{Por hipótesis, } (X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \\
&= A \triangle Y && \text{Definición de } \triangle
\end{aligned}$$

Problemas Propuestos

En esta lista de problemas propuestos, se invita a descubrir el potencial que tiene esta operación, en algunos solamente habrá que usar la definición, y en otros, usar todas las propiedades de $\triangle$ será crucial para simplificar el problema.

P1. Sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Pruebe que $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \iff A = \phi$.

P2. (P2 (a) Control 1, Año 1998)
Probar que para todo A, B, C conjuntos se tiene

(a.1) $A \triangle B = A \triangle C \Longrightarrow B = C$ (a.2) $A \triangle B = C \Longrightarrow B = A \triangle C$

P3. (P1 (ii) Control 1, Año 2000)
Sean A, $B \subseteq \mathcal{U}$. Denotamos $C = (A \cup B)^C$. Probar que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \Longleftrightarrow A \cap B = \phi$$

P4. (P2 (i) Control 1, 2001)

(i.1) $(A \triangle B) \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

(i.2) $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

P5. *a)* Sean A, $B \subseteq \mathcal{U}$. Demostrar que: $[(A \cup B) \setminus (A \triangle B)] \cup [(A \cup B) \setminus A] \;=\; B$

b) Probar que si $A \cup B \;=\; A \triangle B$, entonces $A \cap B = \phi$.

Consultas, sugerencias, errores de tipeo.
cgomez@dim.uchile.cl