MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 3 de Abril 2014

Auxiliar 3 - Funciones

Recordatorio

- Una función $f : E \to F$ se dice *inyectiva* si $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Se dice *sobreyectiva* o *epiyectiva* si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
- Se dice *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva, es decir si $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$.
- Dada una biyección $f : E \to F$, se define su inversa $f^{-1} : F \to E$ por $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

P1

Se definen las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$f(n) = n + 1 \qquad g(n) = n + 1 \qquad h(x, y) = (x + y, x - y)$$

¿Son estas funciones inyectivas? ¿Sobreyectivas? ¿Biyectivas?

P2

Sea E un conjunto no vacío. Para todo $A \in \mathcal{P}(E)$, se define la función indicatriz de A, $\delta_A : E \to \{0, 1\}$ por :

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1. Sea $x \in E$. ¿Cuanto vale $\delta_A(x)$ si $A = E$? ¿Y si $A = \varnothing$?
2. Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Demostrar que para cada $x \in E$, $\delta_{A\cap B}(x) = \delta_A(x)\delta_B(x)$, y $\delta_{A\cup B}(x) = \delta_A(x) + \delta_B(x) - \delta_{A\cap B}(x)$.
3. Sean $C, D \in \mathcal{P}(E)$. Demostrar que $(\forall x \in E, \delta_C(x) \leq \delta_D(x)) \Leftrightarrow C \subseteq D$.

P3 (Control 2 - Año 2011)

1. Sean A, B dos conjuntos no vacíos. Sea $\varphi : A \times B \to A$ dada por $\varphi(a, b) = a$.
   a) Demostrar que φ es sobreyectiva.
   b) ¿Bajo qué condición sobre B resulta φ inyectiva?
2. Sea A conjunto no vacío, sea $\psi : A \to A \times A$ definida por $\psi(a) = (a, a)$.
   a) Demostrar que ψ es inyectiva.
   b) ¿Bajo qué condición sobre A resulta ψ sobreyectiva?

P4

Sea E un conjunto no vacío, sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Definimos la función $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ por $\Phi(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1. Demostrar que Φ es inyectiva si y solo si $A \cup B = E$.
2. Demostrar que Φ es sobreyectiva si y solo si $A \cap B = \varnothing$.
3. Deducir una condición sobre A, B para que Φ sea biyectiva. Suponiendo que se cumple esta condición, encontrar la función inversa Φ^{-1}.

P5 (Control 2 - Año 2010)

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | (\exists a \in \mathbb{R}), (\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = ax^2\}$.
Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(f) = f(2)$. Demostrar que φ es biyectiva y encontrar su inversa.

P6 (Control 2 - Año 1996)

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, f(m + n) = f(m) + f(n)$.

1. Demostrar que $f(0) = 0$.
2. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}, f(-n) = -f(n)$.
3. Demostrar que f es inyectiva si y solo si la unica solución de la ecuación $f(n) = 0$ es $n = 0$.

P7 (Control 2 - Año 2009)

Sea F el conjunto de todas las funciones sobreyectivas $f : D_{a,b} \to f(D_{a,b})$ de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ donde a, b constantes no nulas y $D_{a,b}$ el mayor conjunto donde f está bien definida.

1. Encontrar $D_{a,b}$.
2. Encontrar condiciones sobre a, b de modo que f sea biyectiva. De cumplirse estas condiciones, encontrar f^{-1} y probar que $f^{-1} \in F$.