MA1101-5. Introducción al Álgebra. 2014.
Profesor: José Soto

Numerabilidad

1 Definiciones y propiedades básicas

Relaciones de cardinalidad. Sean A, B dos conjuntos. Decimos que

$$|A| = |B|, \text{ si existe } f\colon A \to B \text{ biyectiva,}$$
$$|A| \leq |B|, \text{ si existe } f\colon A \to B \text{ inyectiva,}$$
$$|A| < |B|, \text{ si } |A| \leq |B| \text{ pero } |A| \neq |B|.$$

Proposición 1.

1. Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$. (En particular $\leq$ es refleja)
2. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$ entonces $|A| \leq |C|$. (Es decir, $\leq$ es transitiva)
3. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$ entonces $|A| = |B|$. (Es decir, $\leq$ es antisimétrica).

La tercera propiedad no se puede demostrar en este ramo. Las tres propiedades anteriores dicen que $\leq$ es una "relación de orden"[1]. Además tenemos la siguiente propiedad (que tampoco podremos probar).

4. Para todo A y B se tiene tricotomía, es decir $|A| < |B|$ o $|A| = |B|$ o $|A| > |B|$.

En particular, $\leq$ es de orden total.

Tipos de conjuntos.

1. **Finitos:** A es *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |\mathbb{N}_n|$, donde

$$\mathbb{N}_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

2. **Infinitos:** A es *infinito* si no es finito.

Proposición 2.

1. Si A y B son finitos, entonces $A \cup B$ es finito.
2. Si A es finito y $a \in A$, entonces $|A \setminus \{a\}|$ es finito y $|A \setminus \{a\}| = |A| - 1$.
3. Si A es finito y $X \subseteq A$ entonces X es finito.
4. Si $|A| \leq |B|$, y B es finito, entonces A es finito.

Numerabilidad. Un conjunto A se dice *numerable* si $|A| = |\mathbb{N}|$.

Proposición 3.

1. $\mathbb{N}$ es infinito.
2. Si A es infinito, entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$.
3. Si A es infinito y $|A| \leq |\mathbb{N}|$ entonces $|A| = |\mathbb{N}|$.
4. Si A es infinito, y $a \in A$, entonces $|A \setminus \{a\}| = |A|$.
5. Si A es infinito, $X \subseteq A$ y X es finito, entonces $|A \setminus X| = |A|$.

Proposición 4. Los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son numerables.
Para probarlo "enumeramos" los elementos de dichos conjuntos con naturales, de modo que todos los elementos tengan una etiqueta y esta sea única.

Proposición 5. $\mathbb{Q}$ es numerable.
Sale de que podemos encontrar inyección de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

[1] Esto no es del todo cierto pues no hemos especificado cual es el conjunto sobre el cual se tiene la relación. No es posible hablar del "conjunto de todos los conjuntos" pero si podemos decir que para cualquier conjunto fijo de conjuntos C, la relación $\leq$ es de orden

2 Uniones Generales

Sean A_0, A_1, ..., A_k conjuntos. Consideremos el conjunto

$$\bigcup_{i=0}^{k} A_i = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_k.$$

La definición anterior se puede hacer precisa usando recurrencias:

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \begin{cases} A_0, \text{ si } n = 0, \\ A_n \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i, \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

Podemos extender esta notación a uniones más generales. Por ejemplo supongamos que existen conjuntos A_i, para todo $i \in \mathbb{N}$. La unión de todos ellos se escribe $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y se define como

$$x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})\ x \in A_i.$$

La familia de indices en la cual se mueve i no tiene por que ser $\mathbb{N}$. Formalmente, si I es un conjunto cualquiera tal que existen conjuntos A_i para todo $i \in I$, definimos su unión como:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I)\ x \in A_i.$$

Así podemos definir objetos como $\bigcup_{i\in\mathbb{R}} A_i$, $\bigcup_{X\in\mathcal{P}(N)} A_X$, etc.

3 Productos generales

Sabemos definir el producto cartesiano de dos conjuntos $A\times B$ como pares ordenados. Queremos extender esta definición para poder hablar de tríos ordenados, *tuplas* ordenadas, o en general, *secuencias* de objetos.

Sean A_0, A_1, ..., A_k conjuntos. Definimos (informalmente) el conjunto

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{k} A_i &= A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_k \\ &= \{(x_0, x_1, \ldots, x_k) \,|\, x_0 \in A_0, x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\}, \end{aligned}$$

como el *producto* de A_0, A_1, ..., y A_k.

Además, decimos que dos secuencias $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ y $(y_0, y_1, \ldots, y_k)$ son iguales si son iguales en todas sus coordenadas, es decir, si $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, ..., $x_k = y_k$.

Podemos interpretar una secuencia $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ en $\prod_{i=0}^{k} A_i$ como la función $x\colon \{0, 1, \ldots, k\} \to \bigcup_{i=0}^{k} A_i$ tal que $x(i) = x_i$. Usando esta definición podemos extender el producto a familias arbitrarias de conjuntos. Sea I un conjunto cualquiera tal que existen conjuntos A_i para todo $i \in I$, podemos definir su producto $\prod_{i\in I} A_i$ como:

$$x \in \prod_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ es una función tal que } x(i) \in A_i.$$

Donde habitualmente escribimos x_i en vez de $x(i)$.

Gracias a esto podemos definir objetos como $\prod_{i\in\mathbb{R}} A_i$, $\prod_{X\in\mathcal{P}(N)} A_X$, etc.

4 Cardinalidad de uniones y productos

Proposición 6.

1. Si A y B son numerables, $A \cup B$ y $A \times B$ son numerables.
2. Sea I un conjunto finito, y A_i un conjunto numerable para todo i, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ y $\prod_{i\in I} A_i$ son numerables.
3. Sea I un conjunto numerable y A_i un conjunto numerable para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es numerable (esta propiedad **no** es cierta para el producto).

Ejercicio: Probar que la unión numerable de finitos disjuntos es numerable.

Demostraremos en este texto la última parte de la proposición 5

4.1. La Unión Numerable de Conjuntos Numerables es Numerable (pero el producto no).

Sea I un conjunto numerable, y para todo $i \in I$, sea A_i un conjunto numerable. Consideremos el conjunto $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Demostraremos que A es numerable.

Demostración. La demostración tiene dos partes.

Primera parte. Cambiemos el conjunto I de indices por el conjunto de los naturales de la siguiente manera: como I es numerable, existe una función $f\colon \mathbb{N} \to I$ biyectiva tal que

$$I = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{f(0), f(1), \dots\}.$$

Definamos $B_n = A_{f(n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n. \tag{$*$}$$

Demostremos $(*)$ por doble inclusión: Sea $x \in A = \bigcup_{i\in I} A_i$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$. Como $f\colon \mathbb{N} \to I$ es biyectiva, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_0) = i_0$ y luego, $x \in B_{n_0}$. Esto implica que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Luego, $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Para la otra inclusión, sea $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Esto implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{n_0} = A_{f(n_0)}$. Como $f(n_0) \in I$, se concluye que $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Esto muestra que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq A$.

Segunda parte. Ahora tenemos que probar que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es numerable. Notemos primero que B_0 es numerable y que $B_0 \subseteq A$. Luego $|\mathbb{N}| \leq |B_0| \leq |A|$. Para concluir, debemos probar que $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Es decir que existe una función inyectiva de A en algún conjunto numerable.

Recordemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, B_n es numerable, es decir, existen funciones $f_n\colon \mathbb{N} \to B_n$ biyectivas tales que:

$$B_n = \{f_n(m) \mid m \in \mathbb{N}\} = \{f_n(0), f_n(1), \dots\}.$$

En otras palabras, $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{f_n(m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$.

Definamos $g\colon A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, como $g(x) = (n, m)$ donde

(I) n es el mínimo indice en $\mathbb{N}$ tal que $x \in B_n$ (en símbolos: $n = \min\{j \in \mathbb{N} \mid x \in A_j\}$).
(II) m es el único indice tal que $f_n(m) = x$.

Es fácil ver que g es inyectiva. En efecto, si $g(x) = g(y) = (n, m)$, la condición de arriba nos dice que $x = f_n(m) = y$.

Con esto hemos probado que $|A| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ que era lo que necesitabamos. $\square$

Ahora veremos porqué el producto numerable de conjuntos numerables no es numerable.

Sea I un conjunto numerable, y para todo $i \in I$, sea A_i un conjunto numerable. Consideremos el conjunto $A = \prod_{i\in I} A_i$. En clases (semana 9) vemos que el intervalo $[0,1)$ no es numerable. Lo que haremos será probar que $|[0,1)| \leq |A|$, lo cual implica que $|A|$ no es numerable.

Demostración. Usemos casi el mismo “truco“ que en la demostración anterior para cambiar I por $\mathbb{N}$. Como I es numerable, existe una función $f\colon \mathbb{N} \to I$ biyectiva tal que

$$I = \{f(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{f(0), f(1), \dots\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = A_{f(n)}$ y $B = \prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Usaremos que $|A| = |B|$.
(Ejercicio 1 para osados: demuestren que $|A| = |B|$. La función natural a usar aquí es $F\colon A \to B$ tal que $(F(x))(n) = x(f(n))$.)

Recordemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, B_n es numerable, es decir, existen funciones $f_n\colon \mathbb{N} \to B_n$ biyectivas tales que:

$$B_n = \{f_n(m) \,|\, m \in \mathbb{N}\} = \{f_n(0), f_n(1), \dots\}.$$

Ahora solo nos resta probar que $|[0,1)| \leq |B|$. La idea es simple: todo elemento z de $[0,1)$ se escribe en notación decimal de manera única como:

$$z = 0{,}z_0 z_1 z_2 z_3 \dots,$$

con $z_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, donde no permitimos una cola infinita de nueves (por ejemplo en vez de escribir 0,299999..., escribimos 0,300000).

Definamos la función $g\colon [0,1) \to B$ que le asocia a cada $z \in [0,1)$, la función $g(z)\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ que vale $g(z) = (f_0(z_0), f_1(z_1), \dots)$. Es decir la coordenada n de $g(z)$ es $g(z)(n) = f_n(z_n) \in B_n$.

La función g es inyectiva.
(Ejercicio 2 para osados: demuestren que g es inyectiva).

Con esto tenemos $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| = |[0,1)| \leq |B| = |A|$. Es decir A no es numerable. □

Para terminar, les cuento que la demostración anterior se puede modificar para probar que incluso el producto numerable de conjuntos *finitos con 2 o más elementos* ya no es numerable. Es decir, incluso $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{i=1}^{\mathbb{N}} \{0,1\}$ es no numerable.
(Ejercicio 3 para osados: demuestren la última afirmación).