MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 9 de Mayo 2014

Trabajo dirigido 3

Sumatorias

P1

Dado $n \geq 1$, consideremos la suma

$$S_n = 2\Big(\frac{1}{1} - \frac{2}{1}\Big) + 3\Big(\frac{1}{1+2} - \frac{2}{2}\Big) + 4\Big(\frac{1}{1+2+3} - \frac{2}{3}\Big) + \cdots + (n+1)\Big(\frac{1}{1+2+\cdots+n} - \frac{2}{n}\Big)$$

Escribir S_n en función de dos sumatorias, y calcular su valor.
Solución

P2 (Control 4, año 2008)

1. Probar, sin usar inducción, que para todo $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$.

   Hint: Usar el teorema del binomio en la expresión $(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$.

2. Calcular en función de n el valor de la suma $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)}$.

Solución

Conjuntos finitos y numerabilidad

P3

Sean E, F dos conjuntos cualesquiera, sea $A \subseteq E$, sea $f : E \to F$. Decir si las afirmaciones siguientes son ciertas, y justificar con una demostración.

1. Si A es finito, entonces $f(A)$ es finito.
2. Si $f(A)$ es finito, entonces A es finito.

Solución

P4

1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos numerables. Probar que $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ es numerable.
2. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de las secuencias de elementos de $\{0, 1\}$ periódicas, definidas por

   $$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, s_{n+N} = s_n$$

   Por ejemplo, las secuencias $s_1 = 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots$ y $s_2 = 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \cdots$ están en $\mathcal{S}$.
   Demostrar que $\mathcal{S}$ es numerable.
   (*Se puede también probar que este resultado sigue siendo cierto cuando se consideran secuencias de elementos no solo de* $\{0, 1\}$*, sino de un conjunto finito o numerable cualquiera.*)

Solución

P5 (Control 4, año 2008)

Un saltamontes debe cubrir la distancia de 0 a 1 avanzando de izquierda a derecha. En cada punto en que se encuentre, debe elegir entre saltar hasta 1 (y completar el recorrido) o saltar la mitad del tramo restante. Sea C el conjunto de todos los recorridos posibles para el saltamontes. Demostrar que C es numerable. Solución

Pauta

P1

Vemos primero que la suma S_n se puede reescribir

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\Big(\frac{1}{1+2+\cdots+k} - \frac{2}{k}\Big)$$

Ahora, notamos que $1+2+\cdots+k = \sum_{j=1}^{k} j$. Entonces S_n se puede escribir

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k} j\Big)^{-1} - \frac{2}{k}\Big]$$

Ocupemos esta escritura para calcular S_n.

$$\begin{aligned}
S_n = \quad & \sum_{k=1}^{n}(k+1)\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k} j\Big)^{-1} - \frac{2}{k}\Big] \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n}(k+1)\Big[\Big(\frac{k(k+1)}{2}\Big)^{-1} - \frac{2}{k}\Big] && \text{pues } \sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2} \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n}(k+1)\Big[\frac{2}{k(k+1)} - \frac{2}{k}\Big] \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n}\frac{2-2(k+1)}{k} \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n}(-2) \\
= \quad & -2n.
\end{aligned}$$

Volver al enunciado

P2

1. Como lo sugiere el hint, escribamos la fórmula del binomio de Newton en la expresión dada, donde $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} \\
= \quad & \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^j 1^{2n-j} + \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}(-x)^j 1^{2n-j} && \text{por la fórmula del binomio de Newton} \\
= \quad & \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}(x^j + (-x)^j) && \text{factorizando} \\
= \quad & \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^j(1+(-1)^j)
\end{aligned}$$

Ahora, notamos que $(1+(-1)^j)=0$ si k es impar, así que solo quedan los términos pares $\{0,2,4,\cdots,2n-2,2n\}=\{2j, j\in\{0,\cdots,n\}$. Sigue, con el cambio de índice $j=2k$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^k(1+1)\\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^k.
\end{aligned}$$

Esta fórmula siendo válida para cualquier $x\in\mathbb{R}$, en particular vale para $x=1$. Así

$$2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}1^k=(1+1)^{2n}+(1-1)^{2n} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}=2^{2n-1}$$

2. Sea $n\in\mathbb{N}$. Calculemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(k+1)(k+2)} && \text{usando la definición del coeficiente binomial}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+2)(k+1)k!(n-k)!} && \text{reorganizando los términos}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+2)!(n-k)!} && \text{notando que } (k+2)!=(k+2)(k+1)k!\\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+2)(n+1)n!}{(k+2)!(n-k)!} && \text{multiplicando por } 1=(n+2)(n+1)/(n+2)(n+1)\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+2)!}{(k+2)!((n+2)-(k+2))!} && \text{pues } (n+2)!=(n+2)(n+1)n! \text{ y } n-k=(n+2)-(k+2)\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2} && \text{usando la definición del coeficiente binomial}\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{j=2}^{n+2}\binom{n}{j} && \text{con el cambio de índice } j=k+2\\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big(\sum_{j=2}^{n+2}\binom{n}{j}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}-\binom{n}{1}-\binom{n}{0}\Big) && \text{sumando } 0\\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\Big(\sum_{j=0}^{n+2}\binom{n}{j}-n-1\Big) && \text{metiendo el segundo y tercero término adentro de la sumatoria}\\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\Big(\sum_{j=0}^{n+2}\binom{n}{j}1^j1^{n+2-j}-n-1\Big)\\
&= \frac{2^{n+2}-n-1}{(n+2)(n+1)} && \text{por el binomio de Newton.}
\end{aligned}$$

Volver al enunciado

P3

1. La primera afirmación es cierta. En efecto, $f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\}$, que es una unión finita de singletones, por lo que es un conjunto finito.

2. La segunda afirmación es falsa. En efecto, si por ejemplo $E = F = \mathbb{R}, A = [0,1]$, la función f es definida por $\forall x \in E, f(x) = 1$, se tiene $f(A) = \{1\}$ que es finito pero A es infinito.

Volver al enunciado

P4

1. Para todo $a \in A$, definimos $a + B = \{a + b, b \in B\}$. $a + B$ es numerable, pues B es numerable y la función $\psi : B \to a + B$ definida por $\forall b \in B, \psi(b) = a + b$ es una biyección. (Esto se puede probar, por ejemplo, notando que si $\varphi : a + B \to B$ es definida por $\varphi(\beta) = \beta - a$, se tiene $\varphi \circ \psi = Id_B$).
   Luego, $A + B = \bigcup_{a \in A} (a + B)$ es numerable, como unión numerable de conjuntos numerables.

2. Para todo $N \geq 1$, definamos S_N como el conjunto de todas las secuencias de elementos de $\{0,1\}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}, u_{n+N} = u_n$ (es decir, las secuencias cuyos N primeros elementos se repiten infinitamente: por ejemplo, $(1,1,1,1,\cdots) \in S_1, (0,1,1,0,1,1,0,1,1,\cdots) \in S_3$).). Veamos que todos los S_N son finitos.
   Sea $N \in \mathbb{N}$, sea $f : S_N \to \{0,1\}^N$ (recordemos que $\{0,1\}^N = \underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{N \text{ veces}}$), definida por

$$\forall s \in S_N, f(s) = (s_1, \cdots, s_N).$$

   Veamos que f es biyectiva.
   Sea $g : \{0,1\}^N \to S_N$ definida por $\forall (x_1, \cdots, x_N) \in \{0,1\}^N, g(x_1, \cdots, x_N) = (x_1, \cdots, x_N, x_1, \cdots, x_N, x_1, \cdots, x_N, \cdots)$.
   Para todo $(x_1, \cdots, x_N) \in \{0,1\}^N$, se tiene $f \circ g(x_1, \cdots, x_N) = f(x_1, \cdots, x_N, x_1, \cdots, x_N, x_1, \cdots, x_N, \cdots) = (x_1, \cdots, x_N)$.
   $f \circ g = Id_{\{0,1\}^N}$ lo que demuestra que f es biyectiva, de inversa $g = f^{-1}$.

   Así, S_N es finito. Se concluye viendo que $\mathcal{S} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} U_N$ es numerable, pues es una unión numerable de conjuntos finitos.

Volver al enunciado

P5

Veamos cuales son los recorridos posibles.

- O bien el saltamontes nunca decide saltar hasta 1 y siempre elige saltar la mitad del tramo restante. Entonces su recorrido será descrito por los puntos $(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \cdots, 1 - \frac{1}{2^n}, \cdots)$. Llamemos R_∞ a este recorrido.

- O bien el saltamontes decide, después de su N-ésimo salto, de completar el recorrido saltando directamente hasta 1. Necesariamente sus N primeras decisiones fueron entonces saltar la mitad del tramo restante, por lo que su recorrido está dado por $R_N = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \cdots, 1 - \frac{1}{2^N}, 1)$.

Se concluye que $C = \{R_\infty\} \cup \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{R_N\} \right)$ es numerable pues es una unión numerable de conjuntos finitos.

Volver al enunciado