MA1101-5. Introducción al Álgebra. Otoño 2014.
Profesor: José Soto
Auxiliares: Camilo Gómez Araya, Sélim Cornet.
Fecha: 16 de Mayo 2014

Trabajo dirigido 4

Funciones

P1 (Control 1, Primavera año 2009)

Sean E, F dos conjuntos, sea $f : E \to F$ una función. Recordar que el conjunto pre-imagen de un subconjunto Y de F está definido por $f^{-1}(Y) = \{x \in E | f(x) \in Y\}$. Ahora se define una función $g : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ por $g(Y) = f^{-1}(Y)$.

1. Elegir uno de estos enunciados y probarlo
   a) f es inyectiva si y soló si g es sobreyectiva.
   b) f es sobreyectiva si y solò si g es inyectiva.
2. Suponiendo que f es biyectiva, determinar la inversa g^{-1} de g.
3. Sea D un subconjunto no vacío de F, sea $h : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(F)$ dada por $h(X) = X \cap D$. Estudiar inyectividad y sobreyectividad de $g^{-1} \circ h$.

Solución

P2

Sea X un conjunto no vacío, sea $f : X \to X$ una función tal que $f \circ f \circ f = f$. Probar que f es inyectiva, si y solò si, f es sobreyectiva.
Solución

Relaciones

P3

Se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}$ por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(y)$. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y encontrar el conjunto cuociente.
Solución

P4 (Control 1, Primavera año 2009)

Sea $\sim$ una relación de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, definida por $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

1. Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. Encontrar las clases de equivalencia $[(x, y)]_\sim$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ de los siguientes elementos: $(1, 1), (3, 1), (0, 2), (-1, 1)$. Hacer un dibujo de estas clases.
3. En el conjunto cuociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim$ se define la relación $\leq$ como $[(a, b)]_\sim \leq [(c, d)]_\sim \Leftrightarrow ad \leq bc$. Demostrar que es una relación de orden, y determinar si es un orden parcial o total.

Solución

Numerabilidad

P5

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de los círculos del plano cuyos centros tienen coordenadas enteras, y de radio racional. Probar que $\mathcal{C}$ es numerable.
Solución

Ejercicios de síntesis

P6 (Funciones, relaciones)

Sean E, F dos conjuntos no vacíos, sea $f : E \to F$ una función. Se define la relación $\mathcal{R}$ en E por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

1. Probar que esto define una relación de equivalencia.
2. Se define $g : E/\mathcal{R} \to F$ como $g([x]_\mathcal{R}) = f(x)$, y $h : E \to E/\mathcal{R}$ por $h(x) = [x]_\mathcal{R}$.
   a) Probar que g es una función bien definida (es decir que si existen a, b tales que $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$, se tiene $g([a]_\mathcal{R}) = g([b]_\mathcal{R})$) e inyectiva.
   b) Probar que h es sobreyectiva.
   c) Probar que $f = g \circ h$.

Solución

P7 (Relaciones, numerabilidad - Control recuperativo, año 2013)

Sea E un conjunto numerable. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ por $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow (\exists f : A \to B$ biyectiva).

1. Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
2. Sea $A \in \mathcal{P}(E)$ infinito. Probar que su clase equivalencia es la colección de los subconjuntos numerables de E, es decir, $[A]_\mathcal{R} = \{X \subseteq E | X \text{ es numerable}\}$.
3. Indicar (justificando) dos elementos de $[A]_\mathcal{R}$ si $A \neq E$.

P8 (Funciones, relaciones, numerabilidad - Control recuperativo, año 2009)

Definimos la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + c = b + d$.

1. Encontrar explícitamente la clase de equivalencia $[(0, 1)]_\mathcal{R}$.
2. Sea $f : (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R} \to \mathbb{Z}$ una función definida por $f([(a, b)]_\mathcal{R}) = a - b$. Probar que f es biyectiva y averiguar, fundamentando, si el conjunto cuociente es numerable.

P9 (Funciones, relaciones - Control recuperativo, año 2010)

Consideremos, para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, la función $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_{a,b}(x) = ax + b$. Se define además el conjunto $G = \{f_{a,b} | a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

1. Probar que $Id_\mathbb{R} \in G$.
2. Probar que toda función $f_{a,b} \in G$ es biyectiva, yy demostrar que $f_{a,b}^{-1} \in G$.
3. Para $f_{a,b}, f_{c,d} \in G$ y $x \in \mathbb{R}$, calcular $f_{a,b} \circ f_{c,d}(x)$ y probar que $f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$.
4. Consideremos ahora el conjunto $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es función}\}$ y la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{S}$ definida por
$$\forall f, g \in \mathcal{S}, f\mathcal{R}g \Leftrightarrow g^{-1} \circ f \in G.$$
   Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, y que $[Id_\mathbb{R}]_\mathcal{R} = G$.

Pauta

P1

1. *a)* $\underline{\Rightarrow}$: supongamos f inyectiva, demostremos que g es sobreyectiva. Por contradicción, si g no fuera sobreyectiva, existiría $X \in \mathcal{P}(E)$ que no tenga pre-imagen por g, es decir tal que $\forall Y \in \mathcal{P}(F), g(Y) \neq X$, o sea, $\forall Y \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(Y) \neq X$. Esto siendo válido para cualquier $Y \in \mathcal{P}(F)$, en particular vale para $Y = f(X)$, así $f^{-1}(f(X)) \neq X$. Pero se sabe que (prop.5 p.48 del apunte) que cuando f es inyectiva, $f^{-1}(f(X)) = X$: contradicción.

   $\underline{\Leftarrow}$: supongamos f no inyectiva, demostremos que g no es sobreyectiva (contrarecíproca). Como f no es inyectiva, existen $x_1, x_2 \in E$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Veamos que $\{x_1\} \in \mathcal{P}(E)$ no tiene pre-imagen por g. En efecto, si tuviera pre-imagen, existiría $Y \in \mathcal{P}(F)$ tal que $g(Y) = \{x_1\}$, es decir $\{y \in E, f(y) \in Y\} = f^{-1}(Y) = \{x_1\}$. Pero si $x_1 \in f^{-1}(Y)$, entonces $f(x_2) = f(x_1) \in Y$ lo que implica que $x_2 \in f^{-1}(Y) = \{x_1\}$: esto significaría $x_1 = x_2$, contradicción. Entonces g no es sobreyectiva.

   b) $\underline{\Rightarrow}$: supongamos f sobreyectiva, demostremos que g es inyectiva. Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(F)$ tales que $g(Y_1) = g(Y_2)$, es decir $f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_2)$. Luego $f(f^{-1}(Y_1)) = f(f^{-1}(Y_2))$ y como f es sobreyectiva, sigue (por la prop. 5 p.48 del apunte) que $Y_1 = Y_2$, así g es inyectiva.

   $\underline{\Leftarrow}$: supongamos g inyectiva, demostremos que f es sobreyectiva. Por contradicción, si f no es sobreyectiva, entonces existe $y \in F$ que no tiene pre-imagen por f.
   Esto es equivalente a decir que $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing \Leftrightarrow g(Y) = \varnothing$. Pero también se tiene $g(\varnothing) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, así $g(\varnothing) = g(\{y\})$ luego por inyectividad de g, $\{y\} = \varnothing$, contradicción. Se concluye que f es sobreyectiva.

2. Supongamos f biyectiva. Entonces por lo anterior, g también es biyectiva y por lo tanto tiene una inversa. La propiedad 5 p.48 del apunte nos dice que:

   - $\forall X \in \mathcal{P}(E), g(f(X)) = f^{-1}(f(X)) = X$ pues f es inyectiva.
   - $\forall Y \in \mathcal{P}(F), f(g(Y)) = f(f^{-1}(Y)) = Y$ pues f es sobreyectiva.

   Definamos entonces $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ por $\forall X \in \mathcal{P}(E), \varphi(X) = f(X)$. Se tiene que $g \circ \varphi$ tiene mismo dominio y recorrido que $Id_{\mathcal{P}(E)}$. Además por lo anterior, $g \circ \varphi$ tiene misma definición que $Id_{\mathcal{P}(E)}$. Se concluye que $g \circ \varphi = Id_{\mathcal{P}(E)}$, por lo tanto (prop 1 p.45 del apunte) $\varphi = g^{-1}$.

3. Si $h : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ está definida por $h(X) = X \cap D$ y $g^{-1} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ por $g^{-1}(X) = f(X)$, entonces $g^{-1} \circ h : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ está definida por: $\forall X \in \mathcal{P}(E), g^{-1} \circ h(X) = f(X \cap D)$.

   - $g^{-1} \circ f$ no es inyectiva: en efecto, si tomo $x \in E \backslash D, g^{-1} \circ h(\{x\}) = f(\{x\} \cap D) = f(\varnothing) = \varnothing$. Y por otro lado, $g^{-1} \circ h(\varnothing) = f(\varnothing \cap D) = f(\varnothing) = \varnothing = g^{-1} \circ h(\{x\})$, pero $\varnothing \neq \{x\}$, así $g^{-1} \circ h$ no es inyectiva.
   - $g^{-1} \circ h$ tampoco es sobreyectiva. Para probar esto, mostremos primero que $f(D) \neq F$. En efecto, si tuvieramos $f(D) = E$, sea $x \in D^c$. Se tiene $f(x) \in F = f(D)$, entonces existe $x' \in D$ tal que $f(x) = f(x')$, pero $x \neq x'$ dado que $x \in D^c, x' \in D$. Esto contradice la inyectividad de f. Se concluye que $f(D) \neq F$. Entonces podemos elegir $y \in f(D)^c$. Esto significa que $\forall d \in D, f(d) \neq y$. En particular, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$, como $X \cap D \subseteq D, \forall d \in X \cap D, f(d) \neq y$. Se concluye que $\forall X \in \mathcal{P}(E), f(X \cap D) \neq \{y\}$, es decir $g^{-1} \circ h(X) \neq \{y\}$. $\{y\}$ no tiene pre-imagen por $g^{-1} \circ h$, luego $g^{-1} \circ h$ no es sobreyectiva.

Volver al enunciado

P2

$\underline{\Rightarrow}$: supongamos f inyectiva, probemos que es sobreyectiva. Sea $y \in E$. Se tiene $f \circ f \circ f(y) = f(y)$, luego por inyectividad de f, $y = f(f(y))$. Entonces $f(y)$ es pre-imagen de y por f, y f es sobreyectiva.

$\underline{\Leftarrow}$: supongamos f sobreyectiva, probemos que es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in E$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Por sobreyectividad de f, existen $z_1, z_2 \in E$ tales que $x_1 = f(z_1), x_2 = f(z_2)$. Así, $f \circ f(z_1) = f \circ f(z_2)$. Aplicando f en ambos lados, sale $f \circ f \circ f(z_1) = f \circ f \circ f(z_2) \Leftrightarrow f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$, y f es inyectiva.
Volver al enunciado

P3

Probemos primero que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

- Para todo $x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \cos(x)$, entonces $\mathcal{R}$ es refleja.
- Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $\cos(x) = \cos(y)$ y $\cos(y) = \cos(z)$ entonces $\cos(x) = \cos(z)$ y $\mathcal{R}$ es transitiva.
- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, si $\cos(x) = \cos(y)$ entonces $\cos(y) = \cos(x)$ y $\mathcal{R}$ es simétrica.

Se concluye que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
Sean $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & x\mathcal{R}y \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(x) = \cos(y) \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(x) - \cos(y) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\exists k \in \mathbb{Z}, (x+y)/2 = k\pi) \vee (\exists m \in \mathbb{Z}, (x-y)/2 = m\pi) \\ \Leftrightarrow \quad & y \in \{\epsilon x + 2k\pi, \epsilon \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Así, dado $x \in \mathbb{R}$, se tiene $[x]_{\mathbb{R}} = \{\epsilon x + 2k\pi, \epsilon \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}$.
Luego, el conjunto cuociente se puede escribir

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \big\{\{\epsilon x + 2k\pi, \epsilon \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}, x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Volver al enunciado

P4

1. Probemos que $\sim$ es una relación de equivalencia.
   - Para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, se tiene $ab = ab$, luego $(a, b) \sim (a, b)$ y $\sim$ es refleja.
   - Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tales que $(a, b) \sim (c, d)$. Así, $ad = bc$, luego $cb = da$, es decir $(c, d) \sim (a, b)$ y $\sim$ es simétrica.
   - Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tales que $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$. Se tiene

   $$\begin{aligned} & af & \\ = \quad & a\frac{de}{c} & \text{pues } (c, d) \sim (e, f) \Leftrightarrow cf = de \\ = \quad & \frac{ae}{c}\frac{bc}{a} & \text{pues } (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \\ = \quad & be & \end{aligned}$$

   Esto demuestra que $(a, b) \sim (e, f)$ y que $\sim$ es transitiva.

2. Sea $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. $(a, b) \sim (1, 1) \Leftrightarrow a \times 1 = b \times 1 \Leftrightarrow a = b$. Así, $[(a, b)]_\sim = \{(a, a), a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$.
   De la misma manera, $[(3, 1)]_\sim = \{(3b, b), b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$ y $[(-1, 1)]_\sim = \{(c, -c), c \in \times\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$.
   Finalmente, $(a, b) \sim (0, 2) \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$, luego $[(0, 2)]_\sim = \{(0, b), b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$.

3. Probemos primero que $\leq$ está bien definida, es decir que si $[(a, b)]_\sim \leq [(c, d)]_\sim$ y que si $(a', b') \in [(a, b)]_\sim$ y si $(c', d') \in [(c, d)]_\sim$ entonces también se tiene $a'd' \leq b'c'$.
   Sean $[(a, b)]_\sim, [(c, d)]_\sim \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim$, sean $(a', b') \in [(a, b)]_\sim, (c', d') \in [(c, d)]_\sim$. Se tiene:

   $$\begin{aligned} & ad \leq bc & \text{por hipótesis} \\ \Leftrightarrow \quad & ad - bc \leq 0 & \\ \Leftrightarrow \quad & a'd' - b'c' \leq 0 & \text{pues } ad - bc = a'd' - b'c' \\ \Leftrightarrow \quad & a'd' \leq b'c' & \end{aligned}$$

y $\leq$ está bien definida.

Veamos que $\leq$ es una relación de orden.

- Sea $[(a,b)]_\sim \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim$. Se tiene $ab \leq ba$, luego $[(a,b)]_\sim \leq [(a,b)]_\sim$ y $\leq$ es refleja.
- Sean $[(a,b)]_\sim, [(c,d)]_\sim \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim$ tales que $[(a,b)]_\sim \leq [(c,d)]_\sim$ y $[(a,b)]_\sim \geq [(c,d)]_\sim$. Así, $ad \leq bc$ y $ad \geq bc$, luego $ad = bc$ y $(a,b)\sim(c,d)$. Esto demuestra que $[(a,b)]_\sim = [(c,d)]_\sim$ y que $\leq$ es antisimétrica.
- Sean $[(a,b)]_\sim, [(c,d)]_\sim, [(e,f)]_\sim \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim$ tales que $[(a,b)]_\sim \leq [(c,d)]_\sim$ y $[(c,d)]_\sim, [(e,f)]_\sim$. Se tiene

$$\begin{aligned} & af \\ \leq\ & a\frac{de}{c} && \text{pues } [(c,d)] \leq [(e,f)] \Leftrightarrow cf \leq de \\ \leq\ & \frac{ae}{c}\frac{bc}{a} && \text{pues } [(a,b)] \sim [(c,d)] \Leftrightarrow ad \leq bc \\ \leq\ & be \end{aligned}$$

  Y por lo tanto $[(a,b)]_\sim \leq [(e,f)]_\sim$ y $\leq$ es transitiva.

Todo esto permite concluir que $\leq$ es una relación de orden. Además es un orden total, pues para cualesquiera $[(a,b)]_\sim, [(c,d)]_\sim \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\})/\sim$, se tiene $ad \leq bc$ o $bc \leq ad$, es decir, $[(a,b)]_\sim \leq [(c,d)]_\sim$ o $[(a,b)]_\sim \leq [(c,d)]_\sim$.

Volver al enunciado

P5

Dados $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ y $R \in \mathbb{Q}$, llamemos $C_{x_0,y_0,R}$ al círculo de centro (x_0, y_0) y de radio R. Definimos $\varphi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q} \to \mathcal{C}$ por: $\varphi(k,m,q) = C_{k,m,q}$. Veamos que φ es una biyección. Para esto, basta encontrar una función inversa. Sea $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ definida por $\psi(C) = (\text{abscisa del centro}, \text{ordenada del centro}, \text{radio})$. Es fácil comprobar que $\varphi\circ\psi = Id_{\mathcal{C}}$ y que $\psi\circ\varphi = Id_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}}$. Entonces φ es una biyección, lo que prueba que $|\mathcal{C}| = |\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}|$. Como este conjunto es numerable (es un producto cartesiano finito de conjuntos numerables), $\mathcal{C}$ es numerable.
Volver al enunciado

P6

1. Probemos primero que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   - Para todo $x \in E$, $f(x) = f(x)$, entonces $\mathcal{R}$ es refleja.
   - Para todos $x, y, z \in E$, si $f(x) = f(y)$ y $f(y) = f(z)$ entonces $f(x) = f(z)$ y $\mathcal{R}$ es transitiva.
   - Para todos $x, y \in E$, si $f(x) = f(y)$ entonces $f(y) = f(x)$ y $\mathcal{R}$ es simétrica.

   Se concluye que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

2. *a)* Sean $a, b \in E$ tales que $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Se tiene $g([a]_\mathcal{R}) = f(a) = f(b)g = ([b]_\mathcal{R})$ y g está bien definida. Veamos que es inyectiva: sean $[a]_\mathcal{R}, [a']_\mathcal{R}$ tales que $g([a]_\mathcal{R}) = g([a']_\mathcal{R})$. Esto significa que $f(a) = f(a')$, es decir $a\mathcal{R}a'$ y $[a]_\mathcal{R} = [a']_\mathcal{R}$. Entonces g es inyectiva.

   b) Sea $A \in E/\mathcal{R}$. Como $A \neq \varnothing, \exists a \in A$. Luego $A = [a]_\mathcal{R} = h(a)$ y h es sobreyectiva.

   c) Se chequea que f y $g\circ h$ tienen mismo dominio (E) y recorrido (F). Sea $x \in E$. $g\circ h(x) = g([x]_\mathcal{R})f(x)$. Con esto se concluye que $f = g\circ h$.

Volver al enunciado