MA3701 Optimización: Análisis Post-optimal

Héctor Ramírez C.

Consideremos un problema lineal en su forma estándar

$$\text{mín } c^t x \,;\; Ax = b, x \geq 0$$

Una vez resuelto este problema, deseamos saber que ocurre con su solución si algunos parámetros del problema cambian.

En todos los casos consideraremos el siguiente tableau óptimo ($\bar{c}_N^t \geq 0$ y $B^{-1}b \geq 0$):

0	$\bar{c}_N^t$	$-\bar{z}$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

1. Variación en coeficientes de función objetivo: c

Si c cambia a $\tilde{c}$, se debe recalcular $\bar{c}_N^t$:

$$\bar{\bar{c}}_N^t \quad = \quad \tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t B^{-1} N$$

- Si $\bar{\bar{c}}_N^t \geq 0$: La solución óptima sigue siendo la misma. La función objetivo toma el valor $\tilde{c}_B^t B^{-1} b$.
- Si $\bar{\bar{c}}_N^t$ tiene una componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex primal.

2. Variación en lado derecho: b

Si b cambia a $\tilde{b}$, se debe recalcular $B^{-1}b$.

- Si $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$: La base óptima no cambia. La solución es ahora $\tilde{x} = [B^{-1}\tilde{b}|0]$ y función objetivo toma el valor $c_B^t B^{-1}\tilde{b}$.
- Si $B^{-1}\tilde{b}$ tiene alguna componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex dual.

3. Introducción de nueva variable

Si se introduce una nueva variable x_{n+1}, con coeficiente c_{n+1} y columna $A_{\cdot n+1}$, esta variable se considera no-básica y su costo reducido viene dado por:

$$\bar{c}_{n+1} \quad = \quad c_{n+1} - c_B^t B^{-1} A_{\cdot n+1}$$

Así, el nuevo tableau será:

0	$\bar{c}_N^t$	$\bar{c}_{n+1}$	$-\bar{z}$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}A_{\cdot n+1}$	$B^{-1}b$

- Si $\bar{c}_{n+1} < 0$:
  - Si $B^{-1}A_{\cdot n+1} \leq 0$: Se produce no-acotamiento.
  - Si $B^{-1}A_{\cdot n+1}$ tiene alguna componente estrictamente positiva: Iterar con Simplex primal.
- Si $\bar{c}_{n+1} \geq 0$: La solución sigue siendo óptima con $x_{n+1} = 0$.

4. Introducción de nueva restricción

Se agrega la restricción $d^t x \leq d_0$ (o equivalentemente $d^t x + x_{n+1} = d_0$). El problema queda de la forma:

$$\text{mín}\,(c^t, 0) \cdot (x, x_{n+1})\,; \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}$$

Se agrega x_{n+1} a la base, por lo que la matriz B y su inversa se calculan como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^t B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que los costos reducidos y la función objetivo no cambian. Sin embargo, $\tilde{B}^{-1}b$ y $\tilde{B}^{-1}N$ si cambian, obteniendo:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}N &= \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ d_N^t - d_B^t B^{-1} N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}b &= \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ d_0 - d_B^t B^{-1} b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, el nuevo tableau será:

0	$\bar{c}_N^t$	0	$-\bar{z}$
I	$B^{-1}N$	0	$B^{-1}b$
0	$d_N^t - d_B^t B^{-1} N$	1	$d_0 - d_B^t B^{-1} b$

- Si $d_0 - d_B^t B^{-1} b < 0$:
  - Si $d_N^t - d_B^t B^{-1} N \geq 0$: Se produce no-acotamiento.
  - Si $d_N^t - d_B^t B^{-1} N$ tiene alguna componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex dual.
- Si $d_0 - d_B^t B^{-1} b \geq 0$: La solución sigue siendo óptima. En la formulación estándar la nueva variable de holgura toma el valor $x_{n+1} = d_0$.