Auxiliar 2

Estrategias estrictamente dominadas y equilibrio de Nash

Profesor: Juan Escobar
Auxiliares: Benjamín Vatter, Leonel Huerta 13 de Agosto, 2014

Problema 1. Representación en forma matricial.

Utilice eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas para encontrar el(los) equilibrio(s) de Nash de los siguientes juegos:

(a)

		$J2$		
		L	M	R
$J1$	U	$30, 3$	$15, 4$	$3, 5$
	D	$1, 6$	$3, 3$	$4, 7$

Respuesta: Vemos que M es estrictamente dominada por R para $J2$. Podemos entonces reducir el juego a:

		$J2$	
		L	R
$J1$	U	$30, 3$	$3, 5$
	D	$1, 6$	$4, 7$

En el juego reducido (antes también lo era), L es estrictamente dominada por R para el $J2$. Luego, podemos reducir el juego a:

		$J2$
		R
$J1$	U	$3, 5$
	D	$4, 7$

Finalmente, en el juego reducido U es estrictamente dominada por D para $J1$. Así:

		$J2$
		R
$J1$	D	$4, 7$

Por eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas (EIEED), el equilibrio de Nash (EN) del juego es (D, R) con pagos $(4, 7)$ para los $J1$ y $J2$, respectivamente.

(b)

		$J2$		
		I	C	D
$J1$	a	$0, 4$	$2, 0$	$1, 5$
	b	$1, 2$	$3, 3$	$2, 0$
	c	$0, 1$	$4, 2$	$3, 1$
	d	$6, 2$	$5, 4$	$2, 3$

Respuesta: Se tiene que:

- b domina estrictamente a a, para el jugador 1.
- En el juego reducido, C domina estrictamente a I, para el jugador 2.
- En el juego reducido, c domina estrictamente a b, para el jugador 1.
- En el juego reducido, C domina estrictamente a D, para el jugador 2.
- En el juego reducido, d domina estrictamente a c, para el jugador 1.

$\Longrightarrow$ Por EIEED, se obtiene que (d, C) es el único EN con pagos $(5, 4)$ para los jugadores 1 y 2, respectivamente.

(c) ***Propuesto:***

		$J2$		
		L	M	R
$J1$	A	$9, 9$	$11, 6$	$5, 5$
	B	$6, 11$	$15, 15$	$32, 10$
	C	$7, 5$	$10, 32$	$4, 4$
	D	$5, 6$	$9, 20$	$5, 6$

Problema 2. La tragedia de los comunes.

Los últimos informes de la ONU señalan un constante aumento en la contaminación atmosférica[1]. Es en este contexto, que un grupo de n países debe decidir si controlan o no sus emisiones contaminantes. Cada país emite 1 unidad de contaminación (uc) la cual afecta a todos, a menos que el país establezca una política de control con un costo equivalente a 3 (uc). Si hay k paises distintos de i que no controlan sus emisiones, el costo total para i será de $k+3$ si decide controlar, versus $k+1$ en caso de que decida no hacerlo.

1. Modele la situación como un juego en forma normal.

   Respuesta:

   Nota: *Siempre hay que escribir 3 cosas:*

   - I: *El conjunto de jugadores.*
   - $\{S_i\}_{i \in I}$: *El conjunto de estrategias para cada jugador.*
   - $\{u_i(s_i, s_{-i})\}_{i \in I}$: *Las funciones de utilidad (pagos) para cada jugador.*

   En este caso:

   - $I = \{1, ..., n\}$ (Los n países)
   - $S_i = \{C, NC\}$ (Controlar, No controlar)
   - $$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} -(k+3) & , \quad s_i = C \\ -(k+1) & , \quad s_i = NC \end{cases}$$

     Donde k es la cantidad de países distintos de i que juegan NC (información contenida en s_{-i}).

   Propuesto: *¿Cómo podemos escribir formalmente k a partir de s_{-i}?*

2. ¿Existen estrategias estrictamente dominadas?

   Respuesta: Es fácil convencerse de que:

   $$\begin{array}{rrcll} & -(k+3) & < & -(k+1) & , \quad \forall k = 0, .., n-1 \\ \iff & u_i(C, s_{-i}) & < & u_i(NC, s_{-i}) & , \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} \end{array}$$

   $\therefore \quad NC$ domina estrictamente a C, $\quad \forall i = 1, ..., n$.

3. ¿Existe equilibrio de Nash? Si su respuesta es afirmativa, encuéntrelo.

   Respuesta: Gracias a la parte anterior, como la única combinación que sobrevive a la EIEED es $(NC, NC, ..., NC, NC)$, se concluye que la situación en que todos juegan NC es el único EN.

4. Interprete el resultado obtenido en la parte anterior. Adopte una postura ambientalista y piense en los costos individuales para los países y para nuestro planeta Tierra. ¿Qué debería hacer la ONU?

   Respuesta: La parte anterior nos dice que la situación en que nadie se preocupa de la contaminación es la situación de equilibrio. Es de esperar entonces que ningún país se preocupe de controlar sus emisiones y los niveles de contaminación sean altos.

   Como todos los jugadores están jugando NC, entonces $k = n-1, \quad \forall i \in I$. Luego, los costos para cada país son de n. Lo que implica que los costos totales son de n^2.

   Si por otra parte, consideraramos la situación en que todos los países controlan sus emisiones, entonces los costos para cada país serían de 3 y, por lo tanto, los costos totales serian de $3n$ y las emisiones de contaminación estarían controladas.

[1] Fuente: La imaginación de su equipo docente.

Si suponemos que n es grande, es fácil ver que los costos individuales y los costos para el planeta son menores cuando todos controlan las emisiones (¡y hay menos contaminación!). Es una buena idea entonces que la ONU organice una cumbre en que todos los países se comprometan a jugar C. Es decir, que la ONU actúe como un mediador para forzar la cooperación en este juego.

Observación: *Esta parte tiene más de una respuesta correcta.*

Problema 3. La caza del jabalí.

Andrés, Bernardo y Carlos son cazadores. Ellos aman a los animales, pero cazan para sobrevivir y por esto, se limitan a capturar una sola presa diaria. En el bosque en el que habitualmente cazan hay conejos y jabalíes.

Cazar un jabalí es complicado y peligroso y, por lo tanto, ni Carlos ni Bernardo son capaces de cazar uno por sí solos. Sin embargo, cuando hay 2 o más cazadores cazando jabalíes, uno es capturado con seguridad y la carne es repartida equitativamente. Andrés, por su parte, es un experimentado cazador y siempre consigue la presa que se propone.

La caza de conejos es aburrida, carente de peligros y fácil. Es por esto que si un cazador se propone cazar conejos, siempre captura uno al final del día.

Suponga que los cazadores deciden por separado y al comienzo de la jornada de caza que animal tratarán de capturar y que el pago por atrapar un jabalí es de 6, mientras que el pago por atrapar un conejo es de 1. Si se fracasa en la captura del jabalí, el pago es de -5.

1. Modele la situación como un juego en su forma normal.

   Respuesta:

   - Jugadores: $I = \{A, B, C\}$.
   - Estrategias: $S_i = \{J, Co\}$, $\forall i \in I$.
   - Pagos:

		C: J	C: Co
B	J	$2, 2, 2$	$3, 3, 1$
	Co	$3, 1, 3$	$6, 1, 1$

		C: J	C: Co
B	J	$1, 3, 3$	$1, -5, 1$
	Co	$1, 1, -5$	$1, 1, 1$

   Donde la primera matriz corresponde a A jugando J y la segunda a A jugando Co.
   Los pagos dentro de las matrices están dispuestos en la forma (u_A, u_B, u_C).

2. Encuentre las estrategias estrictamente dominadas de este juego.

   Respuesta: Es fácil ver que Co está estrictamente dominada por J para Andrés. Bernardo y Carlos no tienen estrategias estrictamente dominadas.

3. Señale todos los equilibrios de Nash.

   Respuesta: El único EN es (J, J, J) con pagos de $(2, 2, 2)$.

4. Suponga que un dia Andrés se enferma y no puede salir a cazar. ¿Cómo cambian sus respuestas a las preguntas anteriores?

   Respuesta: Ahora modelamos el juego como:

   - Jugadores: $I = \{B, C\}$.
   - Estrategias: $S_i = \{J, Co\}$, $\forall i \in I$.
   - Pagos:

		C: J	C: Co
B	J	$3, 3$	$-5, 1$
	Co	$1, -5$	$1, 1$

   No hay estrategias estrictamente dominadas, pero existen 2 EN: (J, J) y (Co, Co), con pagos de $(3, 3)$ y $(1, 1)$, respectivamente.

Problema 4. El modelo electoral de Downs.

Este problema se basa en un modelo electoral clásico propuesto por Downs (1951).

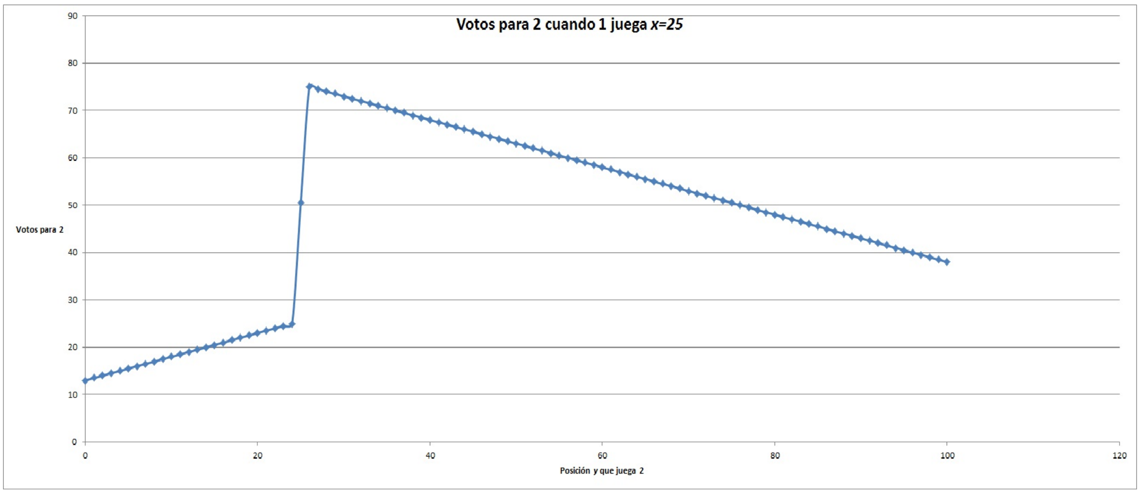
Hay dos candidatos que escogen una plataforma política. Por simplicidad, la plataforma es unidimensional y considera exclusivamente la carga tributaria, i.e, cada candidato propone un número entero entre 0 y 100 (un porcentaje del PIB como carga tributaria).

Hay 101 electores que votan y cada uno tiene una carga tributaria ideal de acuerdo a sus preferencias. Los puntos ideales de cada elector se distribuyen uniformemente entre 0 y 100. Es decir, hay una persona que tiene punto ideal 0, otra con punto ideal 1 y así hasta el punto ideal del elector 101 que es 100, al otro extremo. No hay abstención, todos votan. Si un candidato escoge la plataforma x y otro la plataforma y, un individuo votará por el candidato que tenga la plataforma más cercana a su punto ideal. En caso de indiferencia, vota al azar.

Los candidatos sólo están interesados en ganar la elección y escogen sus plataformas simultáneamente. Se gana por mayoría simple y si hubiese empate se decide al cachipún entre los candidatos.

1. Si el candidato 1 escoge la plataforma $x = 25$, grafique el número de votos que obtiene el otro candidato, para distintos valores de su propia plataforma y. ¿Cuál elección de plataforma maximizará sus votos?

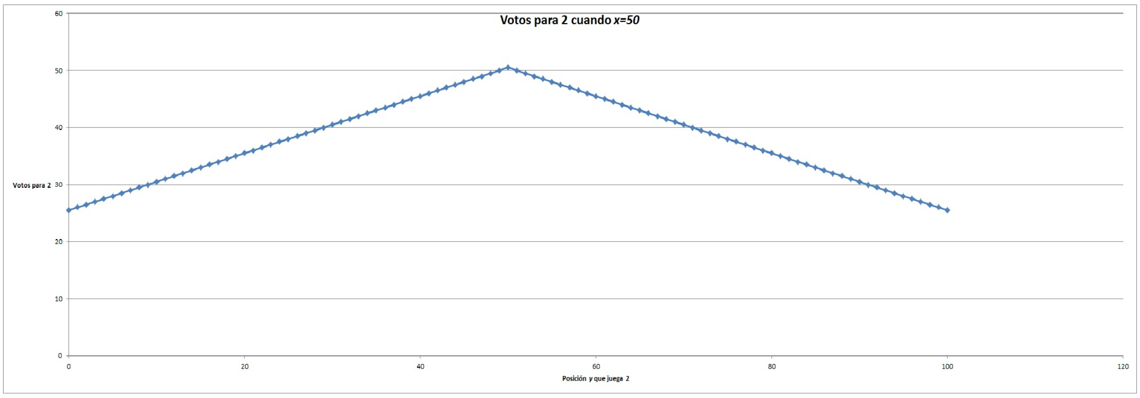
   Respuesta:



   La elección que maximiza sus votos es $y = 26$.

2. Si el candidato 1 escoge la plataforma $x = 50$, grafique el número de votos que obtiene el otro candidato para los distintos valores de su propia plataforma ¿Cuál es la elección de plataforma que maximiza sus votos?

   Respuesta:



En este caso la elección que maximiza los votos es $y = 50$.

3. Encuentre un equilibrio de Nash del juego.

   Respuesta: Gracias a la parte anterior, vemos que la situación en que $x = y = 50$ es un EN.

4. Muestre que el equilibrio de Nash es único. Interprete el resultado en términos políticos.

   Respuesta: Supongamos que existe otro EN en que alguno de los 2 jugadores juega algún valor distinto de 50. Sin pérdida de generalidad, digamos que 1 juega $x \neq 50$.

   Si $x < 50$, entonces 2 maximiza sus votos ubicándose en $y = x + 1$ y gana así la elección. Pero esto implica que 1 no está maximizando y contradice que la situación sea EN.

   El caso $x > 50$ es análogo.

   Sigue que el único EN del juego es $x = y = 50$.

   En términos políticos, el resultado anterior nos dice que a ningún candidato le conviene ofrecer plataformas con cargas tributarias muy extremas y finalmente ambos terminan ofreciendo propuestas centrales con el fin de maximizar los votos obtenidos.