

SOLUCIÓN EXAMEN

1. La venta especial de navidad de una conocida tienda de artículos electrónicos atrae a un público ávido de consumir, que llega de acuerdo con un PPH de tasa λ (clientes por hora). La tienda comienza operando solo con una caja pero, cuando el número de clientes en el área de pago (caja(s) + cola) llega a N , se abre una caja de apoyo pero se mantiene la cola única. Para el eventual cierre de una caja se plantean dos políticas: la política $P1$ indica que se debe cerrar una de las dos cajas (si es que hay dos abiertas) en el instante en que no hay clientes en el área de pago; la política $P2$ indica que se debe cerrar una de las dos cajas en el instante que un cliente termina su servicio (en cualquier caja) y hay menos de N clientes en el área de pago.

Suponga que cada caja demora un tiempo exponencial de parámetro μ [horas] en atender a un cliente y que las cajas operan independientemente.

- (2 pts.) Modele las situaciones descritas (considerando las políticas $P1$ y $P2$) como cadenas de Markov en tiempo continuo. Especifique detalladamente espacio de estado y tasas de transición. Además, indique las probabilidades de transición, clasifique los estados de las CMH subyacentes y establezca recurrencia/transiencia y periodicidad.
- (2 pts.) Escriba las ecuaciones de balance en ambas situaciones e indique qué condiciones deben cumplir los parámetros para que existan probabilidades estacionarias.
- (1 pt.) Suponiendo que las condiciones de la parte anterior se cumplen, determine las probabilidades estacionarias de la cadena para la política $P2$.
- (1 pt.) Cada cliente, independiente de los demás, compra $i = 1, 2, \dots, 6$ artículos con probabilidad r_i ($\sum_{i=1}^6 r_i = 1$), puesto que la tienda quiere que todos se beneficien e impide compras masivas hechas por revendedores. Se sabe que cada artículo vendido genera un retorno (p. venta-costos) de esperanza V y cada cajero recibe un sueldo de S [pesos por hora]. Calcule la utilidad promedio, por unidad de tiempo, que percibe la tienda por concepto de la venta navideña, cuando se aplica la política $P2$.

Sol: a) Comenzamos con $P2$ (más simple), que modelamos como una CMTC con espacio de estados $E = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ y tasas $q(i, j)$. Suponemos además que $N \geq 2$. Tenemos $q(n, n+1) = \lambda, n \geq 0$, $q(n, n-1) = \mu, 0 < n \leq N-1$, $q(n, n-1) = 2\mu, n \geq N$. Lo anterior muestra que se trata de un proceso de nacimiento y muerte, con tasas de nacimiento $\lambda_n = \lambda, n \geq 0$, constantes y tasas de muerte variables, que dependen del tamaño de la población: $\mu_n = \mu$ para $0 < n \leq N-1$ y $\mu_n = 2\mu$ para $n \geq N$. La CMH subyacente tiene probabilidades de transición $p(n, n+1) = \lambda_n / (\lambda_n + \mu_n)$ y $p(n, n-1) = 1 - p(n, n+1)$. Existe una clase de estados, dado que todos comunican y respecto de la recurrencia, hay que ver los valores de λ y μ . Claramente, la cadena es de período 2 porque no es posible volver a cualquier estado en un número impar de etapas.

Respecto de $P1$ la situación es más delicada porque, dado el número clientes, no es posible saber con qué tasa disminuye en 1, debido a que esto depende del número de cajas abiertas. Podemos definir el estado del sistema como el par (número de clientes, número de cajas). Entonces el espacio de estado sería, en principio $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ pero hay que ser más específico, descartando los casos imposibles, como $(0, 2)$ o $(n, 1)$, cuando $n \geq N$. Finalmente queda

$$E = \{(n, 1); n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq N-1\} \cup \{(n, 2); n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Para las tasas de transición tenemos:

$$q((n, 1), (n + 1, 1)) = \lambda, 0 \leq n \leq N - 2, \quad q((N - 1, 1), (N, 2)) = \lambda,$$

$$q((n, 2), (n + 1, 2)) = \lambda, n > 0,$$

$$q((n, 1), (n - 1, 1)) = \mu, 1 \leq n \leq N - 1,$$

$$q((n, 2), (n - 1, 2)) = 2\mu, n \geq 2, \quad q((1, 2), (0, 1)) = \mu.$$

Las probabilidades de transición de la CMH subyacente están dadas por: $p((0, 1), (1, 1)) = 1$,

$$p((n, 1), (n + 1, 1)) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, 1 \leq n \leq N - 2, \quad p((N - 1, 1), (N, 2)) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

$$p((n, 2), (n + 1, 2)) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, n \geq 2, \quad p((1, 2), (2, 2)) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

$$p((n, 1), (n - 1, 1)) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, 1 \leq n \leq N - 1,$$

$$p((n, 2), (n - 1, 2)) = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}, n \geq 2, \quad p((1, 2), (0, 1)) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

La cadena es claramente irreducible y el período es 2. Para la recurrencia es necesario ver los valores de los parámetros (en sección dedicada a prob. estacionarias).

b) Comenzamos con $P2$:

$$\lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$(\lambda_n + \mu_n)p_n = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}, n \geq 1,$$

donde los λ_n, μ_n fueron definidos arriba. Como se trata de un proceso de nacimiento y muerte, la condición para que exista prob. estacionaria es que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} < \infty.$$

Pero, según las definiciones de las tasas de nacimiento y muerte, hay convergencia si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/2\mu)^n$ converge, lo que ocurre si $\lambda < 2\mu$. En tal caso hay probabilidades estacionarias y la CMH es recurrente positiva. En caso contrario tenemos recurrencia nula o transiencia.

Para la política $P1$ las ecuaciones de balance son:

$$\lambda p_{01} = \mu(p_{11} + p_{12}),$$

$$(\lambda + \mu)p_{n,1} = \lambda p_{n-1,1} + \mu p_{n+1,1}, 1 \leq n \leq N - 2,$$

$$(\lambda + \mu)p_{N-1,1} = \lambda p_{N-2,1},$$

$$(\lambda + \mu)p_{12} = \mu p_{22},$$

$$(\lambda + 2\mu)p_{n,2} = \lambda p_{n-1,2} + 2\mu p_{n+1,2}, n \geq 2, n \neq N,$$

$$(\lambda + 2\mu)p_{N,2} = \lambda(p_{N-1,2} + p_{N-1,1}) + 2\mu p_{N+1,2}.$$

Con respecto a la existencia de prob. estacionaria, se ve intuitivamente que la convergencia de la serie depende de las $p_{n,2}, n > N$ y en esa región el proceso se comporta como un proceso de nacimiento y muerte con λ y 2μ . Por lo tanto, la condición sería la misma que para la política $P2$. Lo mismo ocurre con la recurrencia.

- c) Resolvemos las ecuaciones de $P2$ bajo el supuesto $\lambda < 2\mu$. Tenemos, de la fórmula general para la prob. estacionaria del un PNM que

$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} p_0.$$

O bien,

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad n \leq N-1,$$

y

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N-1} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{n-N+1} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{2^{n-N+1}} p_0, \quad n \geq N.$$

- d) Aquí podemos interpretar la probabilidad estacionaria p_n como la proporción de tiempo que pasa el sistema en el estado n y ver el costo asociado. Cuando $0 \leq n \leq N-1$ hay una caja abierta y el costo es S ; para $n \geq N$ el costo es $2S$. Entonces, el costo promedio, por unidad de tiempo, en el largo plazo será

$$\begin{aligned} C &= S \sum_{n=0}^{N-1} p_n + 2S \sum_{n=N}^{\infty} p_n = S + S \sum_{n=N}^{\infty} p_n = S + S p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N-1} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{n-N+1} \\ &= S + S p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{\mu}{2\mu - \lambda}. \end{aligned}$$

Por otra parte, cada cliente que entra a la tienda hace una compra de A artículos (va) con esperanza $\mu_A = \sum_{i=1}^6 i p_i$ y un retorno esperado de $\mu_A V$. Dado que la tasa de llegada es de λ clientes por hora, el ingreso medio por unidad de tiempo sería $\lambda \mu_A V$.

2. Una máquina, cuya vida útil es una va Y , con distribución F continua, debe ser reemplazada cada vez que falla, incurriendo la empresa en un costo c_f . La idea de la política preventiva es reemplazar la máquina antes de fallar, cuando alcance la edad T (si es que logra funcionar hasta T), lo cual tiene un costo c_r , bastante menor que c_f . Para atender la máquina se contrata un técnico muy competente pero que tiene la particularidad de visitar la máquina de acuerdo con un PPH(λ) de manera que, si en alguna visita encuentra que la máquina alcanzó o superó la edad T o está fallada, entonces la reemplaza. Suponiendo que el técnico cobra c_v por cada visita, ya sea que cambie o no la máquina, y que por cada unidad de tiempo con la máquina fallada se paga f , calcule el costo por unidad de tiempo de esta política en el largo plazo. Suponga que los reemplazos son instantáneos y que las vidas Y_1, Y_2, \dots de las sucesivas máquinas son independientes del PPH del técnico.

Sol: La primera máquina comienza a funcionar en $t = 0$ y tiene una vida útil Y . La máquina será cambiada en la primera visita que haga el técnico, después de $Y_T := Y \wedge T$. Si $Y_T = X$ entonces la visita tiene un costo $c_v + c_f$ pero si $Y_T = T$, entonces la visita cuesta $c_v + c_r$. Todas las visitas anteriores a $Y \wedge T$ cuestan c_v .

Por otra parte, si designamos por $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ el instante de la n -ésima visita del técnico, y por $N(t)$ el número de visitas realizadas en $[0, t]$ (el PPH de tasa λ), resulta que el costo por tener la máquina sin funcionar es proporcional al tiempo desde el instante que falla Y hasta la próxima visita del técnico, siempre que $Y < T$. Cuando $Y \geq T$ también podría fallar la máquina si la primera visita después de T ocurre después de Y también, es decir, si $S_{N(T)+1} > Y$. Sumando ambas contribuciones tendríamos

$$f[(S_{N(Y)+1} - Y)\mathbf{1}_{\{Y < T\}} + (S_{N(T)+1} - Y)^+\mathbf{1}_{\{Y > T\}}].$$

Consideramos como instante de fin de ciclo el momento en que el técnico cambia la máquina, es decir $S_{N(Y \wedge T)+1}$, cuyo valor esperado designamos por μ_T . Por otra parte, el costo en un ciclo está dado por el número total de visitas, por el costo c_v más el costo de reemplazo más el costo del tiempo de falla. Es decir

$$c_v(N(Y \wedge T) + 1) + c_f \mathbf{1}_{\{Y_T=Y\}} + c_r \mathbf{1}_{\{Y_T=T\}} + f(S_{N(Y)+1} - Y) \mathbf{1}_{\{Y < T\}} + f(S_{N(T)+1} - Y)^+ \mathbf{1}_{\{Y > T\}}.$$

Finalmente, por el resultado de renovación con recompensa, el costo esperado de largo plazo, por unidad de tiempo es

$$C(T) = E[c_v(N(Y \wedge T) + 1) + c_f \mathbf{1}_{\{Y_T=Y\}} + c_r \mathbf{1}_{\{Y_T=T\}} + f(S_{N(Y)+1} - Y) \mathbf{1}_{\{Y < T\}} + f(S_{N(T)+1} - Y)^+ \mathbf{1}_{\{Y > T\}}] / \mu_T.$$

Para calcular $\mu_T = E[S_{N(Y \wedge T)+1}] = E[\sum_{i=1}^{N(Y \wedge T)+1} X_i]$ aplicamos la identidad de Wald pero condicionamos primero en $Y = y$ y luego descondicionamos, obteniendo

$$\mu_T = \int_0^\infty E \left[\sum_{i=1}^{N(y \wedge T)+1} X_i \right] dF(y) = \int_0^T \frac{\lambda y + 1}{\lambda} dF(y) dy + \frac{\lambda T + 1}{\lambda} (1 - F(T)).$$

Calculamos el resto de las esperanzas para obtener $C(T)$.

$$E[N(Y \wedge T)] = \int_0^T \lambda y dF(y) + \lambda T (1 - F(T)).$$

$$E[\mathbf{1}_{\{Y_T=Y\}}] = P[Y < T] = F(T).$$

$$E[\mathbf{1}_{\{Y_T=T\}}] = P[Y \geq T] = 1 - F(T).$$

$$E[(S_{N(Y)+1} - Y) \mathbf{1}_{\{Y < T\}}] = \int_0^\infty E[(S_{N(y)+1} - y) \mathbf{1}_{\{y < T\}}] dF(y) = \int_0^T E[S_{N(y)+1} - y] dF(y) = \frac{F(T)}{\lambda}.$$

Para llegar al último resultado hemos usado la falta de memoria del PPH, lo cual implica que la vida residual tiene ley exponencial λ y $E[S_{N(y)+1} - y] = 1/\lambda$.

$$E[(S_{N(T)+1} - Y)^+ \mathbf{1}_{\{Y > T\}}] = \int_T^\infty E[(S_{N(T)+1} - y)^+] dF(y).$$

Por la falta de memoria de la exponencial podemos decir que el tiempo que transcurre desde T hasta la primera visita es una va exponencial λ . Entonces $S_{N(T)+1} - T$ tiene la ley de X y

$$E[(S_{N(T)+1} - y)^+] = E[(X + T - y)^+] = \int_{y-T}^\infty (x + T - y) \lambda e^{-\lambda x} dx.$$