

SOLUCIÓN CONTROL 2

1. El ministerio del interior ha inaugurado un radar para detección delictual, equipo que está sometido a shocks aleatorios que ocurren de acuerdo con un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de parámetro λ , sabiendo que cada shock produce un daño de magnitud D_i en el dispositivo. Los daños D_i son va iid e independientes del proceso de Poisson. También se sabe que la magnitud del daño decrece con el tiempo, de manera que el impacto del i -ésimo shock es igual a $D_i e^{-as}$ tras un tiempo s .

- a) Se supone que los daños se acumulan de manera que el daño total D_t en un instante t es la suma de los daños provocados por cada shock, tomando en cuenta la atenuación descrita arriba. Calcule $E(D_t)$.

Sol.: De acuerdo con el enunciado, tenemos que

$$D_t = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-a(t-S_i)},$$

donde $0 = S_0 < S_1 < \dots$ son los instantes de llegada en el PPH $N(t)$. Para calcular la esperanza condicionamos en $N(t)$ y usamos el resultado según el cual, los instantes de llegada en $[0, t]$, condicionalmente en $N(t) = n$, se distribuyen como los estadísticos de orden $U_{1:n} \leq \dots \leq U_{n:n}$ de n va iid U_1, U_2, \dots, U_n , uniformes en $[0, t]$. Tenemos entonces que

$$E[D_t] = \sum_{n=0}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-a(t-S_i)} \middle| N(t) = n \right] P[N(t) = n]$$

y

$$E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-a(t-S_i)} \middle| N(t) = n \right] = E \left[\sum_{i=1}^n D_i e^{-a(t-U_{i:n})} \right] = \sum_{i=1}^n E[D_i e^{-a(t-U_{i:n})}].$$

Por otra parte, debido a la independendencia entre los D_i y el proceso N , tenemos $E[D_i e^{-a(t-U_{i:n})}] = E[D_i] E[e^{-a(t-U_{i:n})}] = \mu E[e^{-a(t-U_{i:n})}]$, donde $\mu = E[D_i]$. Entonces,

$$E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-a(t-S_i)} \middle| N(t) = n \right] = \sum_{i=1}^n E[D_i e^{-a(t-U_{i:n})}] = \mu \sum_{i=1}^n E[e^{-a(t-U_{i:n})}]$$

y

$$\mu \sum_{i=1}^n E[e^{-a(t-U_{i:n})}] = \mu E \left[\sum_{i=1}^n e^{-a(t-U_{i:n})} \right] = \mu E \left[\sum_{i=1}^n e^{-a(t-U_i)} \right] = \mu \sum_{i=1}^n E[e^{-a(t-U_i)}].$$

Para calcular la esperanza resolvemos

$$E[e^{-a(t-U_i)}] = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-a(t-u)} du = \frac{e^{-at}}{at} [e^{au}]_0^t = \frac{1 - e^{-at}}{at}.$$

Finalmente,

$$D[D_t] = \mu \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1 - e^{-at}}{at} P[N(t) = n] = \frac{\mu \lambda}{a} (1 - e^{-at}).$$

b) Suponga que se produce un shock cada 4 horas en promedio. Calcule la probabilidad de:

- 1) A lo más un shock entre las 0 y las 8 horas; al menos dos entre las 8 y las 16 y a lo más una entre las 16 y las 24.
- 2) El tercer shock se produce después de las 8.
- 3) La empresa FRESSCODATA ofrece, por una módica suma, un atenuador que intenta reparar el daño producido por cada shock, s unidades de tiempo después que se ha producido el shock y lo logra siempre que el daño en el momento de activarse el atenuador no sea superior a $D^* > 0$. Describa el proceso $Y(t)$ de los shocks que el atenuador no consigue reparar y recalcule $E(D_t)$.

Sol.: Si medimos la tasa en shocks por hora, tenemos $\lambda = 1/4$. Calculamos

$$P[N(8) \leq 1] = P[N(8) = 0] + P[N(8) = 1] = e^{-8\frac{1}{4}} + 8\frac{1}{4}e^{-8\frac{1}{4}} = 3e^{-2} = 0,406.$$

$$P[N(8, 16) \geq 2] = P[N(8) \geq 2] = 1 - P[N(8) < 2] = 1 - P[N(8) \leq 1] = 1 - 3e^{-2} = 0,594.$$

$$P[N(16, 24) \leq 1] = P[N(8) \leq 1] = 0,406.$$

$$P[S_3 > 8] = P[N(8) < 3] = P[N(8) \leq 2] = P[N(8) \leq 1] + P[N(8) = 2] = 3e^{-2} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0,677.$$

El atenuador puede eliminar el daño de un shock, digamos i , siempre que ocurra $D_i e^{-a(S_i + s - S_i)} = D_i e^{-as} < D^*$. La probabilidad de que un shock no sea eliminado es $p = P[D_i > e^{as} D^*]$. Si cada shock se mantiene con probabilidad p , entonces el proceso resultante de los shocks no eliminados es un Poisson filtrado (homogéneo) con tasa λp . Con esta información adicional concluimos que

$$E[D_t] = \frac{\mu p \lambda}{a} (1 - e^{-at}).$$

2. La afamada empresa FORRESEE INVESTMENT (F.I.) posee una mesa de dinero donde trabajan K operadores sometidos permanentemente a tensiones muy intensas y por esta razón (c/u independientemente) tienen colapsos nerviosos con tasa λ .

Cuando un operador sufre una crisis se le envía a tratamiento. Con probabilidad p_{12} el colapso es leve y es tratado en la enfermería local; con probabilidad p_{13} el colapso es severo y el operador es enviado a una clínica externa. La enfermería y la clínica se toman tiempos exponenciales de parámetros respectivos μ_2, μ_3 para revivir a un operador. Un operador dado de alta de la enfermería es examinado por un psicólogo quien, con probabilidad p_{23} lo envía a la clínica y con probabilidad p_{21} lo devuelve a su trabajo en la mesa de dinero. Los operadores dados de alta por la clínica son enviados directamente a la mesa de dinero. Suponga que $p_{12} + p_{13} = 1, p_{21} + p_{23} = 1$ y que todas las va exponenciales son independientes.

- a) Modele la situación descrita anteriormente como una cadena de Markov de tiempo continuo (CMTC) $\{X(t), t \geq 0\}$, especificando detalladamente el espacio de estados, las tasas y las probabilidades de transición.

Sol.: Consideramos como espacio de estados al conjunto

$$E = \{(n_1, n_2, n_3) | n_1 + n_2 + n_3 = K\},$$

donde n_1 es el número de operadores en la mesa de dinero, n_2 el número de operadores en la enfermería y n_3 los que están en la clínica. Las tasas de transición pueden escribirse como sigue: sea $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3), \bar{n}_{12} = (n_1 - 1, n_2 + 1, n_3), \bar{n}_{13} = (n_1 - 1, n_2, n_3 + 1), \bar{n}_{21} = (n_1 + 1, n_2 - 1, n_3), \bar{n}_{23} = (n_1, n_2 - 1, n_3 + 1), \bar{n}_{31} = (n_1 + 1, n_2, n_3 - 1), \bar{n}_{32} = (n_1, n_2 + 1, n_3 - 1)$.

Lo anterior representa el conjunto de estados accesibles desde (n_1, n_2, n_3) porque un operador que sale de alguna situación solo puede ir a alguna de las otras dos. Para las tasas tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{n}, \bar{n}_{12}} &= n_1 \lambda p_{12}, & \lambda_{\bar{n}, \bar{n}_{13}} &= n_1 \lambda p_{13}, \\ \lambda_{\bar{n}, \bar{n}_{21}} &= n_2 \mu_2 p_{21}, & \lambda_{\bar{n}, \bar{n}_{23}} &= n_2 \mu_2 p_{23}, \\ \lambda_{\bar{n}, \bar{n}_{31}} &= n_3 \mu_3.\end{aligned}$$

Las demás tasas se consideran nulas, por ejemplo $\lambda_{\bar{n}, \bar{n}_{32}} = 0$ puesto que de la clínica solo se puede ir a la mesa de dinero (de la mesa de operaciones a la mesa de dinero). Para las probabilidades de transición tenemos que calcular la tasa de salida de \bar{n} , digamos $v_{\bar{n}}$, y obtener las probabilidades de transición dividiendo las tasas por $v_{\bar{n}}$. Así tenemos

$$p_{\bar{n}, \bar{n}_{12}} = \frac{n_1 \lambda p_{12}}{v_{\bar{n}}}, \quad p_{\bar{n}, \bar{n}_{13}} = \frac{n_1 \lambda p_{13}}{v_{\bar{n}}},$$

etc., donde

$$v_{\bar{n}} = \sum_{ij} \lambda_{\bar{n}, \bar{n}_{ij}}.$$

- b) De argumentos para justificar la existencia de las probabilidades estacionarias para la cadena $X(t)$ y plantee el sistema lineal que satisfacen dichas probabilidades.

Sol.: La CMHTC descrita tiene espacio de estados finito y es irreducible. Por lo tanto, la CMH de tiempo discreta subyacente es ergódica y esta condición basta para que la CMHTC tenga probabilidades estacionarias. Si designamos por p el vector fila de las probabilidades estacionarias y por Q la matriz de las tasas (con $-v_{\bar{n}}$ en la diagonal) entonces p se obtiene resolviendo $pQ = 0$, con la condición de que las componentes sean no negativas y sumen 1. La matriz Q se puede fabricar con las tasas ya presentadas y recorriendo el conjunto E de alguna manera, por ejemplo, $(K, 0, 0) \rightarrow (K-1, 1, 0) \rightarrow (K-1, 0, 1) \rightarrow \dots$.

- c) Wenceslao Armijo ha llegado recientemente de la península (ibérica), encontrando trabajo en F.I. y, como todos sus colegas de la mesa de dinero, es susceptible de sufrir colapsos nerviosos, como se describe arriba. Modele la situación de Wenceslao como una CMTC $W(t)$, especificando detalladamente el espacio de estados, las tasas y las probabilidades de transición y calcule las probabilidades estacionarias.

Sol.: La situación de WA es como la de cualquiera de sus colegas, entre los cuales hay total independencia en términos de los colapsos nerviosos. WA obedece a una CMHTC con $E = \{1, 2, 3\}$ (mesa de dinero, enfermería y clínica respectivamente). Las tasas son $\lambda_{12} = \lambda p_{12}$, $\lambda_{13} = \lambda p_{13}$, $\lambda_{21} = \mu_2 p_{21}$, $\lambda_{23} = \mu_2 p_{23}$, $\lambda_{31} = \mu_3$. Las probabilidades de transición (que denotamos π_{ij} para no confundir con las p_{ij}) son $\pi_{12} = p_{12}$, $\pi_{13} = p_{13}$, $\pi_{21} = p_{21}$, $\pi_{23} = p_{23}$, $\pi_{31} = 1$. Escribimos la matriz Q para el cálculo de la probabilidad estacionaria de WA.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda p_{12} & \lambda p_{13} \\ \mu_2 p_{21} & -\mu_2 & \mu_2 p_{23} \\ \mu_3 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix}$$

y el sistema $pQ = 0$, con $p = (p_1, p_2, p_3)$, se traduce en las ecuaciones

$$-\lambda p_1 + \mu_2 p_{21} p_2 + \mu_3 p_3 = 0,$$

$$\lambda p_{12} p_1 = \mu_2 p_2,$$

$$\lambda p_{13} p_1 + \mu_2 p_{23} p_2 - \mu_3 p_3 = 0,$$

que se resuelven fácilmente:

$$p_2 = \frac{\lambda p_{12}}{\mu_2} p_1,$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{\mu_3} (1 - p_{12} p_{21}) p_1,$$

$$p_1 = \left(1 + \frac{\lambda p_{12}}{\mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_3} (1 - p_{12} p_{21}) \right)^{-1}.$$

d) A partir del análisis de la situación de Wenceslao proponga (y justifique) una solución para el problema de las probabilidades estacionarias de la cadena $X(t)$.

Sol.: Debido a la independencia de los operadores, ellos actúan (en el largo plazo) como lanzamientos independientes de una ruleta con tres sectores de áreas proporcionales a las probabilidades estacionarias. Entonces el comportamiento global, que consiste en agregar las K ruletas es una variable trinominal. Si designamos por $N(t) = (N_1(t), N_2(t), N_3(t))$ la CMHTC global, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2, N_3(t) = n_3] = \frac{K!}{n_1! n_2! n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3},$$

para n_1, n_2, n_3 enteros no negativos tales que $n_1 + n_2 + n_3 = K$.