



Universidad de Chile  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería  
Profesor: Raúl Gouet  
Auxiliares: Mario Guajardo, Daniel Yung

## CONTROL 1

### 1 de Septiembre de 2005

#### Problema 1

Pilotos de autos llegan a la inscripción de una competencia de automóviles según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [pilotos/hr]. Las inscripciones son aceptadas durante un intervalo de tiempo de largo  $T$  [hr] (en el caso de no tener inscritos, los jueces reabrirán un período de inscripción de igual duración hasta que haya al menos un inscrito). Considere que un piloto que llegó a inscribirse en el instante  $s$  podrá correr la competencia a cualquier velocidad menor que  $\frac{s}{T}$  [km/hr].

Sin embargo, la estrategia de cada piloto es realizar el mínimo esfuerzo para intentar ganar la carrera: cuando se da la largada (lo que ocurre en un instante posterior a  $T$ ), parten a velocidad *muy lenta*<sup>1</sup> y cada piloto intentará acelerar instantáneamente si ve que está empatado o detrás de uno o más autos, pero respetando su límite de velocidad máxima. Considere que todos los autos parten al mismo tiempo desde un mismo punto de partida y que la pista que recorren los autos es *muy larga*.<sup>2</sup>

- (1.5 pts) Calcule la esperanza de la velocidad con que llega a la meta el ganador de la prueba.
- (0.5 pts) Suponga que los pilotos que llegan a la inscripción pueden ser *agresivos*, *moderados* o *defensivos*, con probabilidades  $p_a$ ,  $p_m$  y  $p_d$ , respectivamente. Si en el instante  $s$ ,  $s < T$ , sólo se ha registrado una inscripción y corresponde a un piloto *agresivo*, calcule la probabilidad de que un piloto *agresivo* gane la carrera.
- (1.5 pts) Suponga que la carrera partió en  $t_0 = 0$ . Un piloto cualquiera podrá acudir varias veces a cargar combustible a pits durante la carrera. El tiempo entre paradas a pits se distribuye según una v.a. exponencial de parámetro  $\mu$ . Considere que el tiempo que un piloto permanece en pits es despreciable. La  $i$ -ésima carga de combustible inicialmente alcanza para recorrer  $G_i$  kilómetros, en que  $G_i$ ,  $i \geq 1$ , son variables exponenciales i.i.d. de parámetro  $\gamma$  e independientes de  $N(t)$ , en que  $N(t)$  denota el número de veces que un piloto ha pasado a pits en  $[0, t]$ . Asuma que el combustible con que parten los autos es  $G_0$ , carga realizada justo cuando empieza la carrera. El número de kilómetros que permite recorrer una de las cargas decrecerá exponencialmente en el tiempo, i.e., si una carga inicialmente alcanzaba para recorrer  $G$  [km],  $t$  unidades de tiempo más tarde alcanzará para recorrer  $Ge^{-\alpha t}$ . Si el número de kilómetros que permiten recorrer las cargas son aditivos, calcule la esperanza del número de kilómetros que puede recorrer un piloto arbitrario en el instante  $t$  y estudie su comportamiento cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- (1.5 pts) Suponga que la cantidad de público que asiste a ver la carrera depende del número de pilotos que se inscribieron. Si los pilotos inscritos fueron  $n$ , entonces el proceso  $M(t)$  que cuenta el número de asistentes llegados hasta el instante  $t$  (medido desde que se cerraron las inscripciones), es un proceso de Poisson de tasa  $(n\alpha)$ . Sea  $X_m^t$  el tiempo medido desde  $t$  hasta que llega el próximo asistente, condicional en que hasta  $t$  han llegado  $m$  asistentes. Entregue una expresión para la distribución de  $X_m^t$ .
- (1.0 pts) Uno de los organizadores de la competencia ha decidido rediseñar el sistema de inscripciones: esperar hasta que lleguen  $N$  pilotos al lugar de inscripción, luego proceder a una fase de tramitación en que cada piloto, de acuerdo a su orden de llegada (el primero que llega es el primero en atenderse), deberá presentar su documentación para inscribirse en la prueba. El tiempo en que se lleva a cabo la documentación para cada piloto es una v.a. exponencial de parámetro  $\beta$  (todas i.i.d.). Inmediatamente después de que el último

<sup>1</sup>Digamos a velocidad  $\epsilon \approx 0$ , tal que a todos les es permitida esta velocidad.

<sup>2</sup>Digamos de una longitud de  $Z$  [Km.] ( $Z \gg 1$ ).

piloto inscrito haya realizado la documentación comienza la carrera. Entregue una expresión para el tiempo esperado transcurrido desde que un piloto llega al lugar de inscripción hasta que comienza la prueba.

## Problema 2

Una compañía que produce helado cuenta con un trabajador que opera una única máquina para fabricar dicho producto. Esta máquina opera de forma tal que tras cada período de producción, que demora un intervalo de tiempo de  $X_i$  horas, entrega un lote de helado de  $R_i$  Kg., en que  $X_i$  v.a. continuas i.i.d. de distribución  $F$  y  $R_i$  v.a. continuas i.i.d. de distribución  $R$ .<sup>3</sup>

Suponga que el operario tiene un salario de  $S_{op}[\frac{\$}{hora}]$  y que la máquina consume, por conceptos de energía,  $C_e[\frac{\$}{hora}]$  y que, independientemente de la cantidad de helado producida, la máquina consume  $\$C_m$  cada período de producción en materias primas.

La máquina ha estado presentando fallas que hacen pensar que pronto deberá ser reparada, por lo que el operario llama a un técnico para que le informe cuánto tiempo de vida útil le queda. Se sabe que la máquina falla después de haber producido exactamente  $n$  lotes de helado y que el tiempo que toma repararla es despreciable, sin embargo, representa un costo de  $\$C_R$ .

1. (1,0 pts) Si la empresa lleva largo tiempo produciendo helado, y el operario no recuerda cuántos lotes se han producido desde la última falla ni cuando ésta ocurrió, ¿Cuál es el valor esperado del tiempo que falta para que la máquina falle?
2. (0,5 pts) Bajo estas condiciones, ¿Cuál es el mínimo precio por Kg. de helado que debería cobrar la empresa?

La empresa ha decidido darle un giro a su estrategia de ventas y ha decidido vender el helado directamente al público en la modalidad de paletas de  $K$  Kg. cada una. La empresa porciona cada lote en tantas paletas como pueda. El sobrante de cada lote es considerado desperdicio y eliminado.

3. (1,5 pts) ¿Cuál es la fracción de helado que es desperdiciada en el porcionado?

Las paletas se envasan en cajas de 3 y 5 unidades, que se venden en los supermercados a precios  $\$V_3$  y  $\$V_5$  respectivamente. Por mal envasado, una fracción  $q$  de las paletas salen defectuosas.

Un consumidor, curioso por el lanzamiento de la nueva marca, ha decidido comprar estos helados y elige una caja con  $i$  helados con probabilidad proporcional al valor de esa caja. Este consumidor compra semanalmente una caja de helados (suponga que siempre hay cajas disponibles para comprar) hasta que en una misma caja le tocan 2 ó más helados malos, momento en que decide nunca más comprar, se queja con la empresa por la deficiente calidad de los productos y decide cambiar de fabricante.

4. (1,5 pts) ¿Cuánto dinero esperaría gastar esa persona en helados de esa marca antes de decidir cambiar de fabricante?
5. (0,5 pts) Si todos los clientes se comportan como el anterior y la empresa debe pagar una indemnización de  $\$I$  cuando un cliente reclama por la calidad de los helados, ¿Cuál es el valor esperado que un cliente representa para la empresa?

Debido al gran número de quejas, el servicio de salud ha decidido fiscalizar la calidad de los helados de esta empresa, razón por la que cada semana compra una caja de 3 helados y una de 5 helados. Si más de un helado (considerando las 2 cajas) resulta defectuoso, la empresa recibe una calificación negativa. Si la empresa es calificada negativamente 3 semanas consecutivas, es clausurada por el servicio de salud.

6. (1,0 pts) ¿En cuántas semanas espera el servicio de salud clausurar la empresa?

---

<sup>3</sup>Recuerde que si  $Y$  es una v.a. continua no negativa,  $E(Y) = \int_0^\infty P(Y > y)dy$