

Resumen Teoría Renovación

Definición

Sucesión de v.a. iid $(X_n)_{n \geq 1}$ no negativa, tal que $\mathbb{P}(X_i = 0) < 1$, $\mathbb{P}(X_i > 0)$ y $\mathbb{P}(X_i \geq 0) = 1$, $\forall i$

Sea $\mu = \mathbb{E}(X_i)$, $0 < \mu < \infty$.

Se define $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$.

Sea $N(t) = \sup\{n \geq 1 | S_n \leq t\}$, $t \geq 0$, $\{N(t) | t \geq 0\}$ define un proceso de conteo.

Relación clásica entre función de conteo $N(t)$ y tiempo S_n :

$$N(t) \geq n \iff S_n \leq t$$

Distribución de $N(t)$

Sea $F(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$, $n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Se tiene que:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$$

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq t\right) = F_n(t)$$

Donde F_n es la convolución de F n veces consigo misma.

Función de Renovación

La función de renovación se define como:

$$m(t) = \mathbb{E}(N(t)), \quad t \geq 0$$

Esta función cumple que:

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

Se puede demostrar que $m(t) < \infty$, $\forall t$, es decir no pueden haber infinitas renovaciones en un intervalo dado y tampoco puede haber una última renovación.

Proposición

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{c.s.} \frac{1}{\mu} \geq 0$$

Teorema de Wald

Se define un tiempo de parada si el suceso $\{N = n\}$ solo depende de X_1, X_2, \dots, X_n .

El teorema de Wald dice que para una sucesión $(X_n)_{n \geq 1}$ iid con $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ finita y N un tiempo de parada para (X_n) , tal que $\mathbb{E}(N) < \infty$, entonces:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \mathbb{E}(N)\mu$$

Utilizando el teorema de Wald se puede probar que:

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{c.s.} \frac{1}{\mu}$$

Teorema clave de Renovación

Se define una v.a. X lattice si $\exists d > 0$ t.q:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = nd) = 1$$

El **teorema de blackwell** dice lo siguiente:

1. Si F es no lattice, entonces:

$$a > 0, \quad m(t+a) - m(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{a}{\mu}$$

2. Si F es lattice, consideramos el número de renovaciones en nd .

$$\mathbb{E}(\text{número de renovaciones en } nd) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{d}{\mu}$$

El **teorema clave** (versión no lattice) dice:

Si F es no lattice y h una función directamente Riemann integrable, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x) dm(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} h(t) dt$$

Renovación alternante

Sea $ON(t)$ el suceso "el proceso se encuentra en estado "ON", en el instante t ".

Sea $\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(ON(t))$. Se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(t) = \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n) + \mathbb{E}(Y_n)}$$

Vida residual y edad

Se definen las v.a. $A(t) = t - S_{N(t)}$ (edad) y la vida residual $Y(t) = S_{N(t)+1} - t$ de una componente en funcionamiento en t .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t) \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(ON(t)) \\ &= \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{\mu} \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(t)) dt \end{aligned}$$

Para $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y(t) \leq x)$ se obtiene el mismo resultado.

Paradoja de inspección: $\mathbb{P}(X_{N(t)+1} > x) \geq \mathbb{P}(X_1 > x)$.

Procesos de Renovación con retardo

Tenemos una sucesión $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. independientes tales que:

$$\begin{aligned} X_1 &\sim G \\ X_2 &\sim F, \quad n \geq 2 \\ \implies m_D(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (G * F_{n-1})(t) \end{aligned}$$

Un caso importante de proceso de retardo se obtiene tomando

$$G(x) = Fe(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(t)) dt$$

Utilizando Fe se habla de un proceso de renovación en equilibrio y se cumple que:

1. $\frac{m_D(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$
2. $\mathbb{P}(Y_D(t) \leq x) = Fe(x)$
3. El proceso $\{N_d(t) | t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios. Es decir, la ley de $N_D(t+s) - N_D(t)$ no depende de t

Renovación con recompensa

Se trata de un proceso de renovación $(X_n)_{n \geq 1}$, que tiene asociada una sucesión $(R_n)_{n \geq 1}$ de recompensas.

La recompensa hasta t es:

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i$$

Luego,

$$\frac{\mathbb{E}(R(t))}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mu}$$