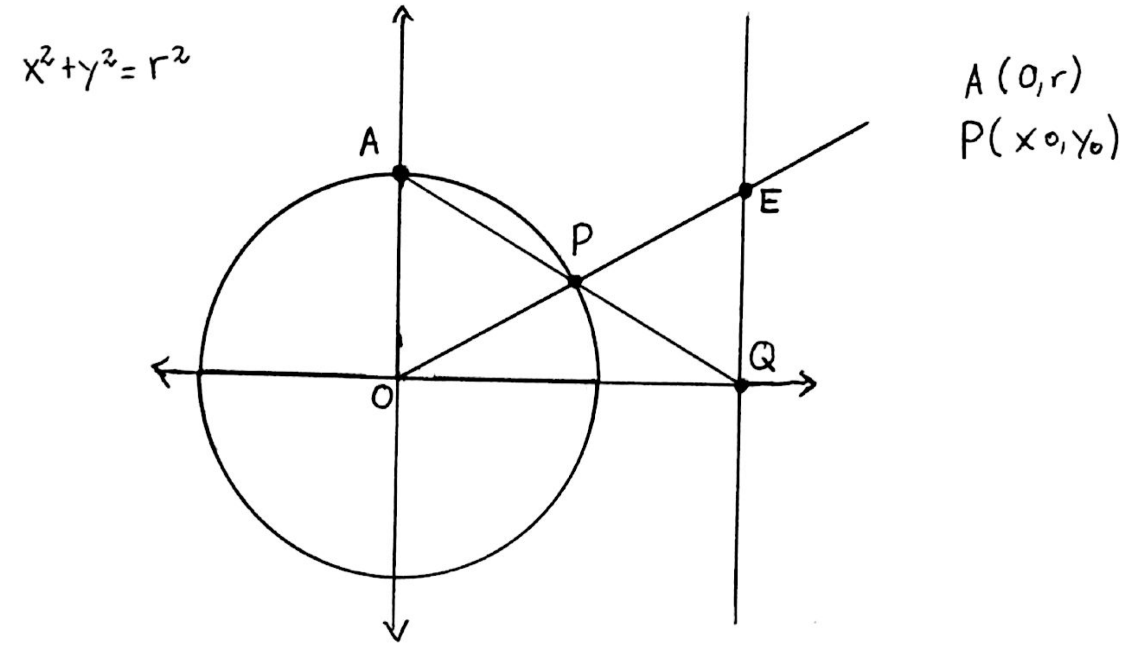
Auxiliar 4

Solución

P1]



Digamos que $E=(a,b)$, y por lo tanto $Q=(a,0)$. Dado que P está en la circunferencia, se cumple que

$$x_0^2+y_0^2=r^2 \qquad (*)$$

De modo de aprovechar esta ecuación para encontrar el lugar geométrico de E, intentaremos expresar x_0 e y_0 en términos de "a" y "b" para reemplazar en (*) y obtener la ecuación buscada. Necesitamos entonces 2 ecuaciones (ya que hay que despejar 2 variables, x_0 e y_0) y para obtenerlas encontremos las ecuaciones de las rectas AP (donde se encuentra Q) y OP (donde se encuentra E)..

* Recuerde que la recta que pasa por (x_1,y_1) y (x_2,y_2) con $x_1\neq x_2$ corresponde a:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$L_{AP}: \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_P-y_A}{x_P-x_A} \Leftrightarrow \frac{y-r}{x} = \frac{y_0-r}{x_0}$$

Puesto que $Q(a,0) \in L_{AP}$, necesariamente $\boxed{\frac{-r}{a} = \frac{y_0-r}{x_0}}$ (1)

$$L_{OP}: \frac{y-y_{origen}}{x-x_{origen}} = \frac{y_P-y_{origen}}{x_P-x_{origen}} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$$

Puesto que $E(a,b) \in L_{OP}$, necesariamente $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{y_0}{x_0}}$ (2)

Por lo que tenemos el sistema:

$$\begin{array}{ll} (1) & -\frac{r}{a} = \frac{y_0-r}{x_0} \\ (2) & \frac{b}{a} = \frac{y_0}{x_0} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} (1) & -rx_0 - ay_0 = -ar \\ (2) & bx_0 - ay_0 = 0 \end{array}$$

Para despejar x_0 e y_0 podemos hacer

$$(2)-(1) \Rightarrow (bx_0 - ay_0) - (-rx_0 - ay_0) = 0 - (-ar)$$

$$\Leftrightarrow bx_0 + rx_0 = ar \Leftrightarrow (r+b)x_0 = ar \Leftrightarrow \boxed{x_0 = \frac{ar}{r+b}.}$$

Reemplazando en (1):

$$bx_0 - ay_0 = 0 \Leftrightarrow b\frac{ar}{r+b} - ay_0 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{br}{r+b} - y_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y_0 = \frac{br}{r+b}.}$$

Reemplazando estos valores de x_0 e y_0 en la circunferencia obtenemos:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{ar}{r+b}\right)^2 + \left(\frac{br}{r+b}\right)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2r^2}{(r+b)^2} + \frac{b^2r^2}{(r+b)^2} = r^2 \quad / \cdot \frac{1}{r^2} \quad / \cdot (r+b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = (r+b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \cancel{b^2} = r^2 + 2rb + \cancel{b^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = r^2 + 2rb.$$

Recordando el rol de "a" (abscisa) y "b" (ordenada), la ecuación que cumple E es

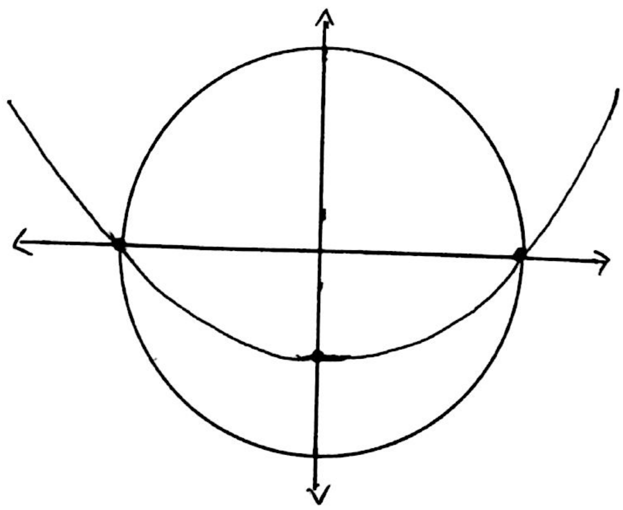
$$x^2 = r^2 + 2ry \quad / \cdot \frac{1}{2r}$$

$$\boxed{\frac{1}{2r}x^2 = y + \frac{r}{2}} \quad [\text{Forma canónica}]$$

Que es la ecuación de una parábola vertical con vértice en

$$\left(0, -\frac{r}{2}\right)$$

Note que la intersección con el eje X es: $y=0 \Leftrightarrow x^2 = r^2 \Leftrightarrow x = \pm r.$



P2]

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + 4x = 2y - 7$$

1.- $\quad x^2 + \frac{y^2}{4} + 4x = 2y - 7 \quad / \cdot 4$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 16x = 8y - 28$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 16x + y^2 - 8y + 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 4x) + (y^2 - 8y) + 28 = 0$$

Completar cuadrados: $x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 = (x+2)^2 - 4$

$y^2 - 8y = y^2 - 2 \cdot 4y + 4^2 - 4^2 = (y-4)^2 - 16.$

Luego

$$4(x^2+4x) + (y^2 - 8y) + 28 = 0 \Leftrightarrow 4\left[(x+2)^2 - 4\right] + \left[(y-4)^2 - 16\right] + 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)^2 - 16 + (y-4)^2 - 16 + 28 = 0$$

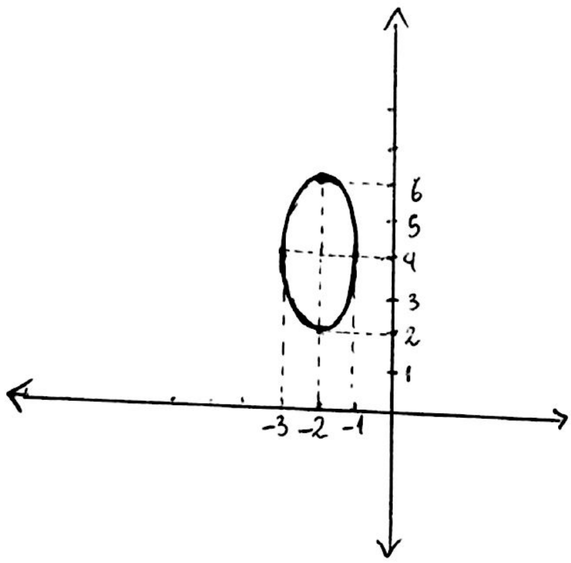
$$\Leftrightarrow 4(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4 \quad / \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + \frac{(y-4)^2}{4} = 1.$$

Esta ecuación corresponde finalmente a.

$$\frac{(x-(-2))^2}{1^2} + \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1$$

Elipse.



P2]

2.- Sea $P(x_0,y_0)$ un punto de la elipse, es decir, cumple con

$$(x_0+2)^2+\frac{(y_0-4)^2}{4}=1. \qquad (*)$$

Para aprovechar esta ecuación y determinar el lugar geométrico de $M(x_M,y_M)$, expresemos x_0 e y_0 en términos de x_M e y_M para reemplazar en $(*)$. Como M es punto medio de A y P, se cumple que

$$x_M=\frac{x_A+x_P}{2}=\frac{x_0}{2} \qquad y_M=\frac{y_A+y_P}{2}=\frac{p+y_0}{2}$$

De aquí se despeja de inmediato

$$x_0=2x_M \qquad y_0=2y_M-p.$$

Y reemplazando en $(*)$ tenemos

$$(x_0+2)^2+\frac{(y_0-4)^2}{4}=1 \iff (2x_M+2)^2+\frac{(2y_M-p-4)^2}{4}=1$$

$$\iff [2(x_M+1)]^2+\frac{\left[2\left(y_M-\frac{p+4}{2}\right)\right]^2}{4}=1$$

$$\iff 4(x_M+1)^2+\frac{\cancel{4}\left(y_M-\frac{p+4}{4}\right)^2}{\cancel{4}}=1$$

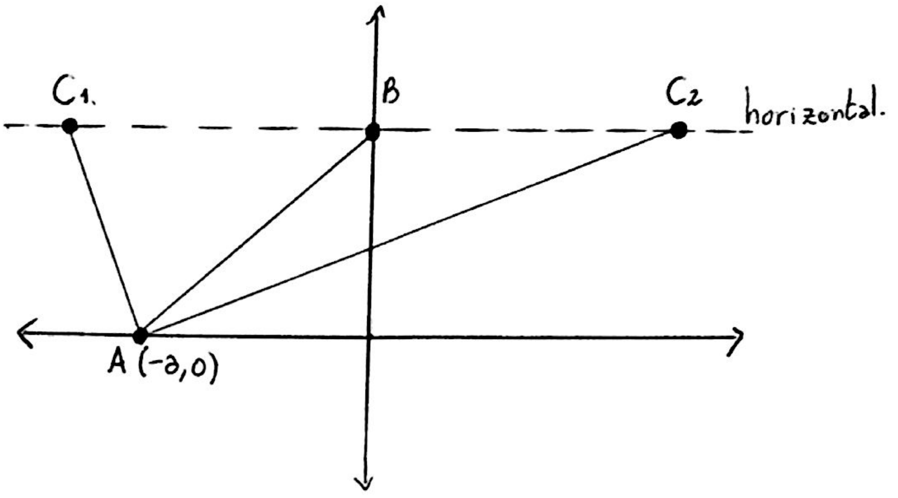
$$\iff \boxed{\frac{(x_M+1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\left(y_M-\frac{p+4}{4}\right)^2=1}$$

Que es una elipse centrada en $\left(-1,\frac{p+4}{4}\right)$ //

Scanned by CamScanner

P3

($a>0$)



Note que dada una posición de B, se determinan dos puntos C_1 y C_2 en la horizontal por B que cumplen $AB = CB$. Digamos que $C=(x,y)$ y por ello $B=(0,y)$. La condición $AB = CB$ se escribe analíticamente como:

$$AB = CB$$

$$\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$$

$$\sqrt{(-a-0)^2+(0-y)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2} \quad /(\,)^2$$

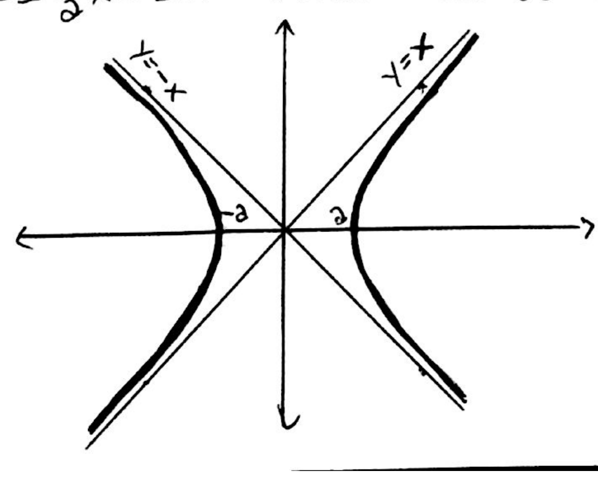
$$a^2+y^2 = x^2$$

$$a^2 = x^2-y^2$$

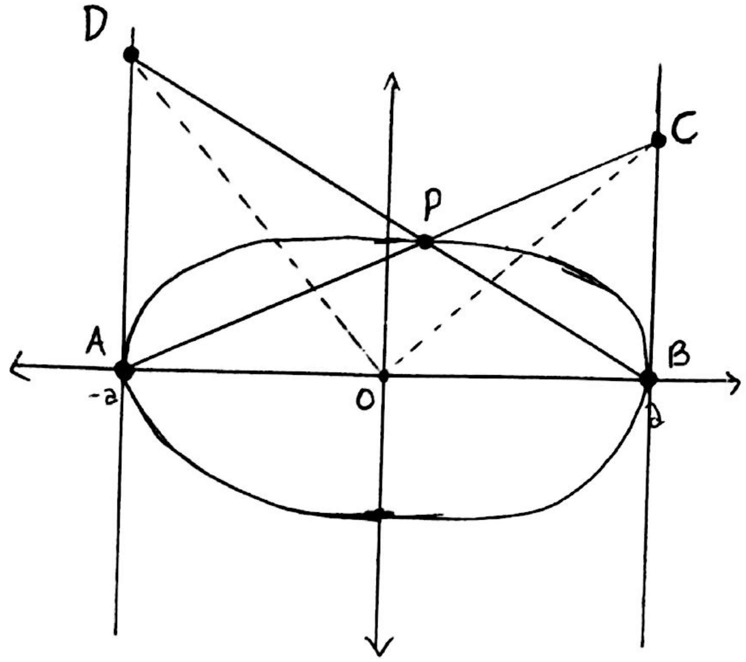
$$\boxed{1 = \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}}$$

Hipérbola equilátera ; horizontal. centrada en el origen.

Sus asíntotas son $y = \pm\frac{a}{a}x = \pm x$ (bisectrices de los cuadrantes).



P4)



$A(-a,0)$
$B(a,0)$
$P(x_0,y_0)$

La ecuación de la elipse en su forma canónica es:

$$x^2+4y^2=a^2 \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1.$$

Que nos permite tener la idea gráfica del problema. Por su simplicidad, usaremos la ecuación $x^2+4y^2=a^2$ mientras podamos. Puesto que C está en la vertical por B, podemos decir que $C=(a,c)$ con $c\in\mathbb{R}$. Análogamente $D=(-a,d)$. Queremos demostrar que

$OC \perp OD$, lo que es equivalente a

$$\boxed{m_{OC}\cdot m_{OD}=-1}$$

Se tiene rápidamente que

$$m_{OC}=\frac{Y_C-Y_{origen}}{X_C-X_{origen}}=\frac{c}{a} \qquad m_{OD}=\frac{Y_D-Y_{origen}}{X_D-X_{origen}}=\frac{d}{-a}.$$

Por lo tanto queremos demostrar que

$$m_{OC} \cdot m_{OD} = \frac{cd}{-a^2} = -1.$$

Pero necesitamos información de "c" y "d". Esto lo encontramos al saber que $C \in L_{AP}$ y $D \in L_{BP}$.

$$L_{AP}: \quad \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A} \iff \frac{y_0}{x_0 + a} = \frac{y}{x+a}.$$

Pero $C \in L_{AP}$ implica que $\boxed{\frac{y_0}{x_0+a} = \frac{c}{2a}}$ (1)

$$L_{BP}: \quad \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{y - y_B}{x - x_B} \iff \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y}{x-a}.$$

Pero $D \in L_{BP}$ implica que $\boxed{\frac{y_0}{x_0-a} = \frac{d}{-2a}}$ (2)

De (1) se despeja $\frac{c}{a} = \frac{2y_0}{x_0+a}$ y de (2) se despeja.

$\frac{d}{-a} = \frac{2y_0}{x_0-a}$. Por lo tanto

$$m_{OC} \cdot m_{OD} = \frac{cd}{-a^2} = \left(\frac{2y_0}{x_0+a}\right) \cdot \left(\frac{2y_0}{x_0-a}\right) = \frac{4y_0^2}{x_0^2 - a^2}$$

Pero recordemos por la elipse que $x_0^2 + 4y_0^2 = a^2$ (Puesto que P es un punto de ella). En particular $x_0^2 - a^2 = -4y_0^2$ y por lo tanto

$$m_{OC} \cdot m_{OD} = \frac{4y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{4y_0^2}{-4y_0^2} = -1 \implies OC \perp OD \quad //$$