Auxiliar Extra C.1
Solución

P1)

1.- Notemos que:

$$a^3+b^3 \geq a^2b + ab^2 \iff a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geq 0$$
$$\iff (a^3+b^3) - ab(a+b) \geq 0$$
$$\iff (a+b)(a^2+ab+b^2) - ab(a+b) \geq 0$$
$$\iff (a+b)(a^2-ab+b^2-ab) \geq 0$$
$$\iff (a+b)(a^2-2ab+b^2) \geq 0$$
$$\iff (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

Esta última desigualdad es evidente, puesto que

$$a,b \in \mathbb{R}^+_* \Rightarrow a+b \geq 0$$
$$(a-b) \in \mathbb{R} \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

Y por el teorema de multiplicación de desigualdades, esto implica justamente

$$\left.\begin{array}{l}(a+b) \geq 0 \\ (a-b)^2 \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \cdot 0 = 0$$
$$\Rightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 \;//$$

P1]

2.- Note que esto se parece mucho a la clásica desigualdad

$$a^2+b^2 \geq 2ab. \qquad (1)$$

De hecho nos gustaría que los términos de la forma "ab" en la desigualdad pedida sean "$2ab$" para compararlos con "a^2+b^2". Con esto en mente podemos multiplicar todo por 2 y obtener:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \quad /\cdot 2$$
$$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ac$$
$$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2) \geq 2ab+2bc+2ac$$

Esto último nos sugiere usar (1) con cada pareja de números y ocupar el teorema de suma de desigualdades. En efecto, tenemos como verdadero que

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$b^2+c^2 \geq 2bc$$
$$a^2+c^2 \geq 2ac$$

Y sumando las tres obtenemos:

$$\Longrightarrow \quad (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(a^2+c^2) \geq 2ab+2bc+2ac$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ac \quad /\cdot \frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac \ //$$

P2] Hay que resolver

$$\frac{2x+3-|x-|x+2||}{\sqrt{2x-|1-x^2|}} \geq 0$$

Pero en primer lugar, debemos verificar que la expresión anterior tiene sentido en $\mathbb{R}$. Para esto vemos que en la raíz cuadrada del denominador debe cumplirse necesariamente que

$$2x-|1-x^2|>0$$

Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} & 2x-|1-x^2|>0 \\ \Longleftrightarrow\ & 2x>|1-x^2| \\ \Longleftrightarrow\ & -2x<1-x^2<2x \\ \Longleftrightarrow\ & \underset{(i)}{-2x<1-x^2} \ \wedge\ \underset{(ii)}{1-x^2<2x} \end{aligned}$$

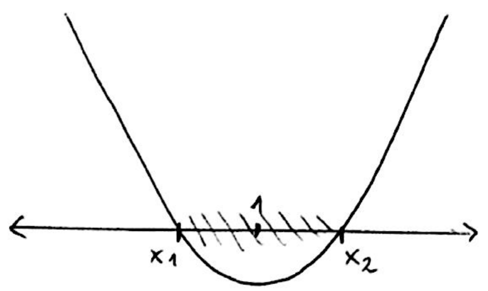
(i) $-2x<1-x^2$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\ & x^2-2x-1<0 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2-2x+1-2<0 \\ \Longleftrightarrow\ & (x-1)^2-2<0 \\ \Longleftrightarrow\ & (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})<0 \end{aligned}$$

Puntos críticos

$x_1=1-\sqrt{2}$ $\quad x_2=1+\sqrt{2}$

$\therefore\ x\in(1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2})$



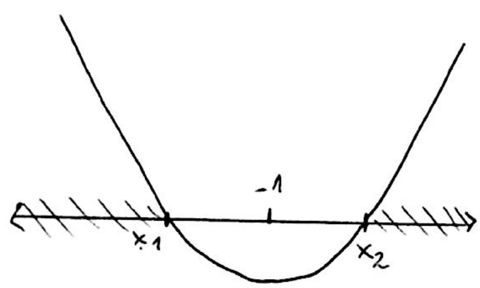
ii) $1-x^2<2x$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\ & 0<x^2+2x-1 \\ \Longleftrightarrow\ & 0<x^2+2x+1-2 \\ \Longleftrightarrow\ & 0<(x+1)^2-2 \\ \Longleftrightarrow\ & 0<(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Puntos críticos

$x_1=-1-\sqrt{2}$ $\quad x_2=-1+\sqrt{2}$

$\therefore\ x\in(-\infty,\,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},\,\infty)$



Como el conector lógico es "$\wedge$", necesitamos la intersección de lo encontrado en (i) y (ii). Primero ordenamos los puntos relevantes

$$-1-\sqrt{2} < 1-\sqrt{2} < -1+\sqrt{2} < 1+\sqrt{2} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Recuerde que} \\ \quad 1 < \sqrt{2}\end{array}\right]$$

Por lo tanto la intersección simplemente entrega

$$I = (-1+\sqrt{2}\,;\ 1+\sqrt{2})$$

Para que nuestro problema tenga sentido en $\mathbb{R}$, necesariamente $x \in I$. Una vez que $x \in I$, recordemos que la raíz cuadrada es siempre positiva, por lo que podemos simplificarla y reducir la inecuación a:

$$2x+3-|x-|x+2|| \geq 0$$

Debemos atacar ahora el módulo interior. El punto crítico de $|x+2|$ es $x=-2$, por lo que

$$x < -2 \Rightarrow |x+2| = -x-2$$
$$x \geq -2 \Rightarrow |x+2| = x+2$$

En principio, deberíamos ponernos en cada caso por separado, pero recordemos que $x \in I$, por lo que x siempre está por encima de (-2). Podemos entonces reducir el módulo y:

$$\begin{aligned}
& 2x+3-|x-|x+2|| \geq 0 \\
x \in I \quad \Rightarrow \quad & 2x+3-|x-(x+2)| \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x+3-|-2| \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x+3-2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x \geq -1 \\
\Leftrightarrow \quad & x \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow x \in \left[-\tfrac{1}{2},\ \infty\right)
\end{aligned}$$

Al intersectar esto con I (puesto que x debe estar en I), obtenemos finalmente:

$$\text{Cjto solución} = \left[-\frac{1}{2}\,;\ \infty\right) \cap (-1+\sqrt{2}\,;\ 1+\sqrt{2}) = (-1+\sqrt{2}\,;\ 1+\sqrt{2}) \;/\!/$$

P3)

1.- $2y(3y+10)+3x(x-2)=(y+5)(y-5)$

$\iff 3x^2-6x+5y^2+20y=-25$

Ahora que está simplificada, procedemos a completar cuadrados.

- $3x^2-6x=3(x^2-2x)=3[x^2-2\cdot 1x]$
$=3[x^2-2\cdot 1x+1^2-1^2]=3[(x-1)^2-1]=3(x-1)^2-3$

- $5y^2+20y=5(y^2+4y)=5(y^2+2\cdot 2y)$
$=5(y^2+2\cdot 2y+2^2-2^2)=5[(y+2)^2-4]=5(y+2)^2-20$

Reemplazando esto en la ecuación:

$$3x^2-6x+5y^2+20y=-25$$
$$\iff 3(x-1)^2-3+5(y+2)^2-20=-25$$
$$\iff 3(x-1)^2+5(y+2)^2=-2$$

Note que tenemos una suma de términos <u>no negativos</u> que da (-2). La solución, por supuesto, no está definida en $\mathbb{R}$, por lo que el conjunto de puntos es vacío.

2.- $(x+1)(x+9)+12=y^2-2y$

$\iff x^2+10x-y^2+2y+21=0$

Ahora que está simplificado, procedemos a completar cuadrados.

- $x^2+10x=x^2+2\cdot 5x=x^2+2\cdot 5x+5^2-5^2=(x+5)^2-25$
- $-y^2+2y=-(y^2-2y)=-(y^2-2\cdot 1y)=-(y^2-2\cdot 1y+1^2-1^2)$
$=-((y-1)^2-1)=-(y-1)^2+1.$

Reemplazando esto en la ecuación:

$$x^2+10x-y^2+2y+21=0$$
$$\Leftrightarrow (x+5)^2-25-(y-1)^2+1+21=0$$
$$\Leftrightarrow (x+5)^2-(y-1)^2=3 \quad / \cdot \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+5)^2}{(\sqrt{3})^2}-\frac{(y-1)^2}{(\sqrt{3})^2}=1 \qquad \text{Hipérbola.}$$

La hipérbola está centrada en $(-5,1)$, es horizontal, $x \in (-\infty, -5-\sqrt{3}] \cup [-5+\sqrt{3}, \infty)$ y sus asíntotas son

$$y-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(x+5)$$
$$y-1=\pm(x+5)$$

Que son simplemente las rectas $y=\pm x$ pero pasando por $(-5,1)$.
¿Cómo sé los intervalos de existencia de x? Note que necesitamos que

$$\frac{(x+5)^2}{(\sqrt{3})^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 \geq (\sqrt{3})^2$$
$$\Leftrightarrow (x+5)^2-(\sqrt{3})^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x+5+\sqrt{3})(x+5-\sqrt{3}) \geq 0$$

Pts críticos: $x_1=-5-\sqrt{3}$; $x_2=-5+\sqrt{3}$

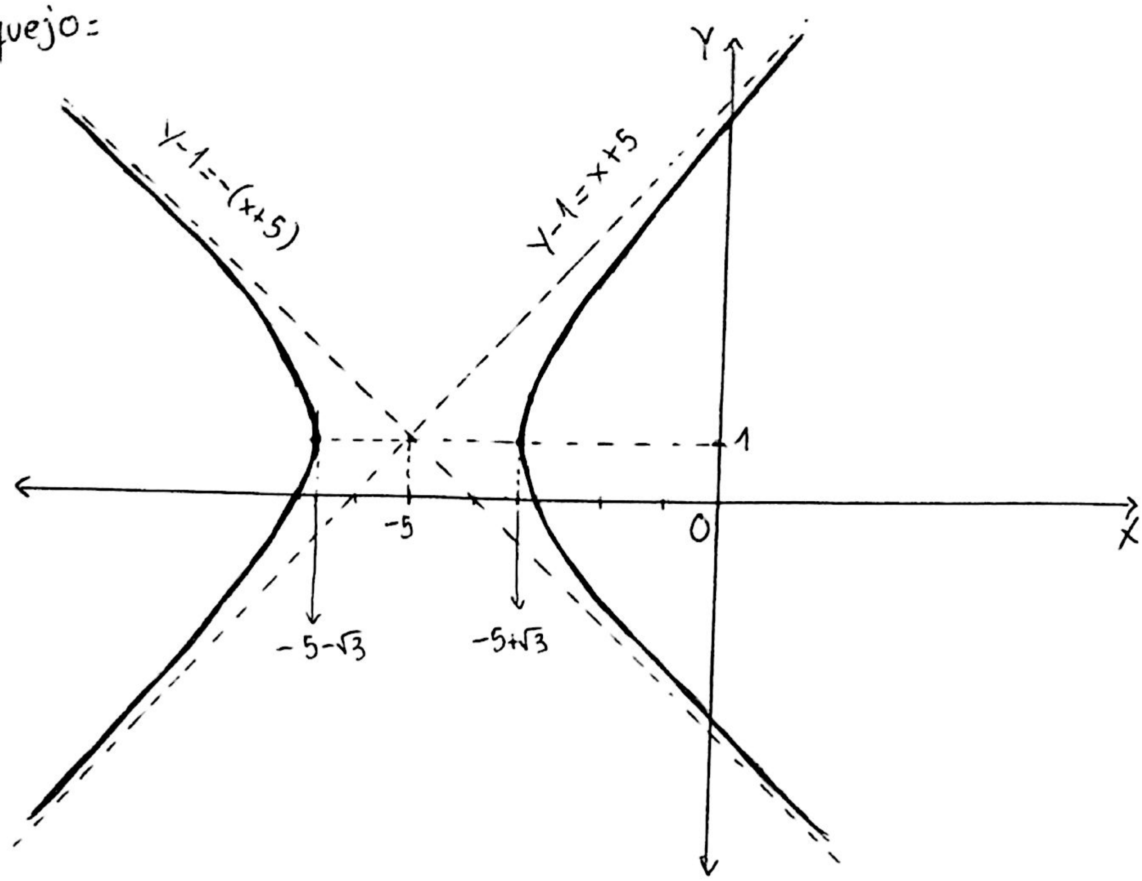
$$\therefore \quad x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$$

En general, si la hipérbola hubiese estado centrada en el origen, es decir, hubiese sido

$$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$$

Tendríamos tenido simplemente $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$; pero como la hipérbola está desplazada a $x=-5$, todo se desplaza (también las asíntotas).

Bosquejo:



3.- $x^2-4y+y^2=(x+2)^2-9$

$\iff y^2-4y = 4x-5$

Completamos cuadrados:

- $y^2-4y = y^2-2\cdot 2y = y^2-2\cdot 2y+2^2-2^2 = (y-2)^2-4$

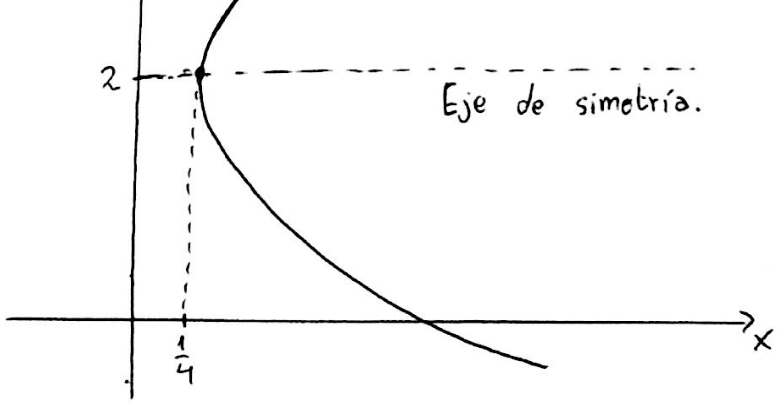
Reemplazando

$y^2-4y=4x-5 \iff (y-2)^2-4=4x-5$

$\iff (y-2)^2=4x-1 \quad / \cdot\frac{1}{4}$

$\iff \frac{1}{4}(y-2)^2 = x-\frac{1}{4}$

Parábola horizontal a la derecha con vértice $(\frac{1}{4},2)$



P4)

1.- Considere la hipérbola de ecuación $x^2-y^2=1$

a) Lo haremos de 2 maneras.

<u>Manera 1</u> = Buscar la recta tangente =

Sea $y-y_0=m(x-x_0)$ la recta que pasa por $P(x_0,y_0)$ con pendiente m. Para que sea tangente necesitamos que

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=1 \\ y-y_0=m(x-x_0) \end{array}\right|$$

Tenga solución única. Despejamos de la recta $y=y_0+m(x-x_0)$ y reemplazamos en la hipérbola =

$$x^2-y^2=1 \iff x^2-(y_0+m(x-x_0))^2=1$$
$$\iff x^2-y_0^2-m^2(x-x_0)^2-2my_0(x-x_0)=1$$
$$\iff x^2-y_0^2-m^2(x^2-2xx_0+x_0^2)-2my_0x+2my_0x_0=1$$
$$\iff (1-m^2)x^2+(2m^2x_0-2my_0)x+(2my_0x_0-1-y_0^2-m^2x_0^2)=0$$

Donde la solución será única ssi $\Delta=0$, es decir =

$$\Delta=b^2-4ac=(2m^2x_0-2my_0)^2-4(1-m^2)(2my_0x_0-1-y_0^2-m^2x_0^2)=0 \quad /\cdot\frac{1}{4}$$
$$\iff (m^2x_0-my_0)^2-(1-m^2)(2my_0x_0-1-y_0^2-m^2x_0^2)=0$$
$$\iff (m^4x_0^2-2m^3x_0y_0+m^2y_0^2)-(2my_0x_0-1-y_0^2-m^2x_0^2-2m^3y_0x_0+m^2+m^2y_0^2+m^4x_0^2)=0$$

Y cancelando...

$$\iff -2my_0x_0+1+y_0^2+m^2x_0^2-m^2=0$$
$$\iff (x_0^2-1)m^2-(2x_0y_0)m+(1+y_0^2)=0$$

Recordemos que P está en la hipérbola, así que $x_0^2-y_0^2=1$; es decir, $1+y_0^2=x_0^2$ y $x_0^2-1=y_0^2$. Luego lo anterior equivale a

$$\iff y_0^2m^2-2x_0y_0m+x_0^2=0 \quad /\cdot\frac{1}{y_0^2}$$
$$\iff m^2-2\frac{x_0}{y_0}m+\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2=0$$

$$\iff \left(m - \frac{x_0}{y_0}\right)^2 = 0$$

$$\iff m = \frac{x_0}{y_0}$$

Por lo tanto la recta tangente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \iff y - y_0 = \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \quad /\cdot y_0$$

$$\iff yy_0 - y_0^2 = xx_0 - x_0^2$$

$$\iff x_0^2 - y_0^2 = xx_0 - yy_0$$

$$\iff 1 = xx_0 - yy_0 \;//$$

Manera 2: Simplemente verificar.

Solo demostraremos verificando que el sistema

$$\begin{array}{l|} x^2 - y^2 = 1 \\ xx_0 - yy_0 = 1 \end{array}$$

Tiene solución única e igual a $P(x_0, y_0)$. Despejando en la recta

$$y = \frac{xx_0 - 1}{y_0}$$

Y reemplazando en la hipérbola:

$$x^2 - y^2 = 1 \iff x^2 - \left(\frac{xx_0 - 1}{y_0}\right)^2 = 1 \iff x^2 - \frac{x^2x_0^2 - 2xx_0 + 1}{y_0^2} = 1 \quad /\cdot y_0^2$$

$$\iff y_0^2x^2 - x^2x_0^2 + 2xx_0 - 1 = y_0^2$$

$$\iff (y_0^2 - x_0^2)x^2 + 2xx_0 = y_0^2 + 1$$

Recordando que P está en la hipérbola, $x_0^2 - y_0^2 = 1$ y por lo tanto $y_0^2 - x_0^2 = -1$ y $y_0^2 + 1 = x_0^2$. Luego

$$\iff -x^2 + 2xx_0 = x_0^2 \iff x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 0$$

$$\iff (x - x_0)^2 = 0$$

$$\iff x = x_0.$$

Usando este valor de x en la recta tenemos

$$y = \frac{x x_0 - 1}{y_0} = \frac{x_0^2 - 1}{y_0} = \frac{y_0^2}{y_0} = y_0.$$

Luego la solución es (x_0, y_0); es decir, el punto P.
[compare la diferencia de cálculo con la 1ª primera].

b) Las asíntotas de $x^2 - y^2 = 1$ son $y = \pm x$. Al intersectar la tangente por $P(x_0, y_0)$ con cada asíntota obtenemos los puntos A y B dados por

$$A = \left| \begin{array}{r} x x_0 - y y_0 = 1 \\ y = x \end{array} \right. \qquad B = \left| \begin{array}{r} x x_0 - y y_0 = 1 \\ y = -x \end{array} \right.$$

En A:

$$y = x \Rightarrow x x_0 - y y_0 = 1$$
$$\Leftrightarrow x x_0 - x y_0 = 1$$
$$\Leftrightarrow x(x_0 - y_0) = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{x_0 - y_0}$$
$$y = \frac{1}{x_0 - y_0}$$

En B:

$$y = -x \Rightarrow x x_0 - y y_0 = 1$$
$$\Leftrightarrow x x_0 + x y_0 = 1$$
$$\Leftrightarrow x(x_0 + y_0) = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{x_0 + y_0}$$
$$y = \frac{-1}{x_0 + y_0}$$

Luego

$$A\left(\frac{1}{x_0 - y_0} ; \frac{1}{x_0 - y_0} \right) \quad y \quad B\left(\frac{1}{x_0 + y_0} ; \frac{-1}{x_0 + y_0} \right)$$

Solo resta calcular su punto medio.

$$M_{AB}=\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0-y_0}+\frac{1}{x_0+y_0}\right];\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0-y_0}-\frac{1}{x_0+y_0}\right]\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x_0+y_0+x_0-y_0}{(x_0-y_0)(x_0+y_0)}\right];\frac{1}{2}\left[\frac{x_0+y_0-x_0+y_0}{(x_0-y_0)(x_0+y_0)}\right]\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2x_0}{x_0^2-y_0^2}\right);\frac{1}{2}\left(\frac{2y_0}{x_0^2-y_0^2}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{x_0}{x_0^2-y_0^2},\frac{y_0}{x_0^2-y_0^2}\right)$$

Y recordando que P está en la hipérbola, tenemos $x_0^2-y_0^2=1$

$$=(x_0,y_0)=P \;//$$

Por lo tanto, el punto medio de las intersecciones era justamente el punto P.

P4)

2.- Si $C \in L_1$, significa que sus coordenadas se pueden escribir como (c, mc), con $c \in \mathbb{R}$, puesto que los puntos de L_1 cumplen $y = mx$. Análogamente, si $D \in L_2$, sus coordenadas son $(d, -md)$, con $d \in \mathbb{R}$.

La condición $\overline{CD} = a$ se escribe analíticamente como

$$d(C,D) = a \quad /()^2$$

$$d(C,D)^2 = a^2$$

$$(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = a^2$$

$$(c-d)^2 + (mc+md)^2 = a^2$$

$$(c-d)^2 + m^2(c+d)^2 = a^2 \qquad (1)$$

Y el punto medio de CD, digamos M, tiene coordenadas

$$x_M = \frac{x_c + x_d}{2} = \frac{c+d}{2}$$

$$y_M = \frac{y_c + y_d}{2} = \frac{mc - md}{2} = \frac{m}{2}(c-d)$$

Note que podemos aprovechar los términos $(c+d)$ y $(c-d)$ para introducir las coordenadas de M a la ecuación (1).

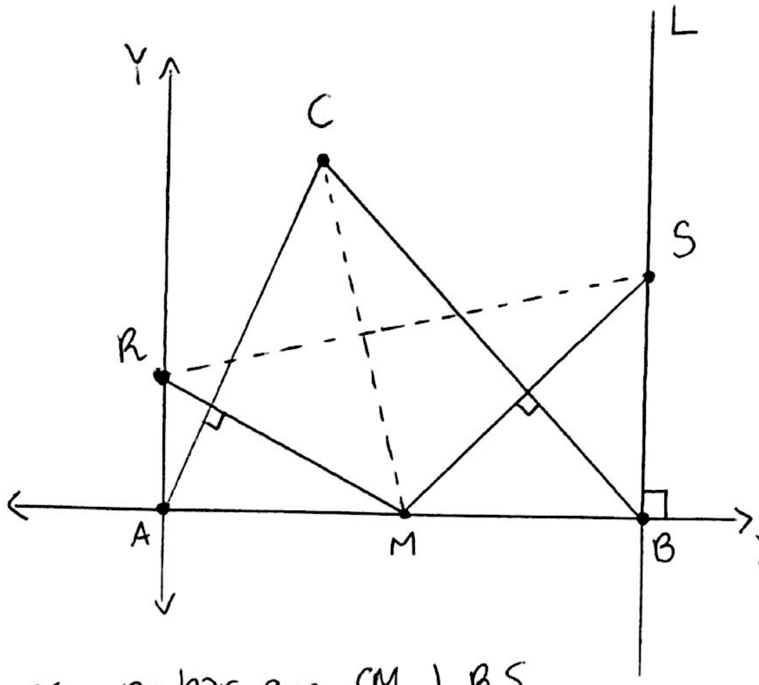
$$c+d = 2x_M \quad ; \quad c-d = \frac{2y_M}{m}$$

$$\Rightarrow (c-d)^2 + m^2(c+d)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2y_M}{m}\right)^2 + m^2(2x_M)^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{4}{m^2} y_M^2 + 4m^2 x_M^2 = a^2 \quad / \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_M^2}{\left(\frac{a}{2m}\right)^2} + \frac{y_M^2}{\left(\frac{am}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{Elipse.}$$

Propuesto



$A(0,0)$
$B(2b,0)$
$C(c,d)$
M punto medio de $\overline{AB}$.
$MS \perp CB$
$MR \perp CA$

pdq: $CM \perp RS$.

Idea: necesitamos probar que $CM \perp RS$, lo que es equivalente a $m_{CM} \cdot m_{RS} = -1$. Para calcular m_{CM} y m_{RS} necesitamos las coordenadas de M, R y S.
Para calcular las coordenadas de R y S necesitamos el valor de m_{MR} y m_{MS}, que se relacionan con m_{AC} y m_{CB} debido a la perpendicularidad, esto es,

$$m_{AC} \cdot m_{MR} = -1 \Rightarrow m_{MR} = \frac{-1}{m_{AC}}$$

$$m_{CB} \cdot m_{MS} = -1 \Rightarrow m_{MS} = \frac{-1}{m_{CB}}$$

Por lo tanto debemos conocer m_{ac} y m_{CB} para comenzar. Lo demás es seguir la cadena de razonamiento anterior. Aún está a tiempo para hacerlo por su cuenta.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,0) \\ B(2b,0) \\ C(c,d) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bullet\ m_{AC} = \dfrac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \dfrac{-d}{-c} = \dfrac{d}{c} \Rightarrow m_{MR} = \dfrac{-c}{d} \\ \\ \bullet\ m_{CB} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{d}{c-2b} \Rightarrow m_{MS} = \dfrac{2b-c}{d} \end{array}$$

Como R y S se encuentran en $\overline{MR}$ y $\overline{MS}$ respectivamente, necesariamente

$$m_{MR} = \frac{y_R - y_M}{x_R - x_M} = \frac{-c}{d} \qquad (*)$$

Pero R está en el eje OY, por lo que $x_R = 0$.
Además M es punto medio de $\overline{AB}$, por lo que

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = (b, 0)$$

Luego $(*)$ se convierte en

$$\frac{y_R}{-b} = \frac{-c}{d} \Rightarrow y_R = \frac{cb}{d}$$

También necesariamente

$$m_{MS} = \frac{y_S - y_M}{x_S - x_M} = \frac{2b-c}{d} \qquad (**)$$

Y recordando que $S \in L$, se tiene $x_S = 2b$. Luego $(**)$ se convierte en

$$\frac{y_S}{2b-b} = \frac{2b-c}{d} \Rightarrow y_S = \frac{2b^2 - cb}{d}$$

Por lo tanto

$$m_{RS} = \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R} = \frac{1}{(2b-0)} \left(\frac{2b^2 - cb}{d} - \frac{cb}{d} \right) = \frac{2b^2 - 2cb}{2bd} = \frac{b-c}{d} \qquad (1)$$

Y además

$$m_{CM} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{d}{c - b} \qquad (2)$$

Con (1) y (2) vemos que

$$m_{CM} \cdot m_{RS} = \left(\frac{d}{c-b}\right) \cdot \left(\frac{b-c}{d}\right) = - \frac{d(b-c)}{d(b-c)} = -1$$

Lo que implica $CM \perp RS$, que era lo que se quería probar.