

MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera

Profesor: Michal Kowalczyk

Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semana 8

Definiciones

1. Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es tal que

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x \leq M$$
 , entonces A se dice *acotado superiormente* y M es una *cota superior*.
2. Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es tal que

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x \geq m$$
 , entonces A se dice *acotado inferiormente* y m es una *cota inferior*.
3. Cualquier real mayor que M es otra cota superior, y cualquier real menor que m es otra cota inferior, por lo que las cotas, cuando existen, no son únicas.
4. Un conjunto se dice *acotado* si es acotado inferior y superiormente de forma simultánea.
5. Es importante recalcar que, si M es cota superior y m es cota inferior, entonces *ningún* elemento de A puede cumplir $x > M$ o $x < m$. Si existe algún x que cumpla tales desigualdades, entonces M o m (según corresponda) no son cotas.
6. Si x_M es una cota superior de A , y además $x_M \in A$, diremos que x_M es el *máximo* de A .
7. Si x_m es una cota inferior de A , y además $x_m \in A$, diremos que x_m es el *mínimo* de A .
8. Si s es una cota superior de A , y además para cualquier otra cota superior M se cumple $s \leq M$, diremos que s es el *supremo* de A ($s = \sup(A)$).
9. Si u es una cota inferior de A , y además para cualquier otra cota inferior m se cumple $u \geq m$, diremos que u es el *ínfimo* de A ($u = \inf(A)$).
10. Es directo que s es la menor cota superior y u es la mayor cota inferior.
11. Si un conjunto posee máximo, también posee supremo y son iguales.
12. Si un conjunto posee mínimo, también posee ínfimo y son iguales.
13. Note que tanto el supremo como el ínfimo *no necesitan estar contenidos en el conjunto*, a diferencia del máximo y el mínimo. Debido a esto, la existencia de supremo o ínfimo no garantizan la existencia de máximo o mínimo.

Axioma del Supremo

1. Axioma: Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo.
2. En otras palabras, cualquier conjunto que posea cotas superiores necesariamente debe poseer una cota que sea la más pequeña de todas.
3. Si bien el axioma no garantiza la unicidad del supremo, es directo de verificar esta cualidad por definición.
4. El axioma garantiza la existencia de ínfimos notando que $\inf(A) = -\sup(-A)$.
5. Si bien todo conjunto acotado superiormente posee supremo, no siempre poseerá máximo.

Propiedades y usos del Supremo

1. Sean A y B dos conjuntos reales. Se define

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

$$A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$$

2. $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
3. $A, B \subset [0, \infty) \Rightarrow \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$
4. La parte entera de $x > 0$ se define como

$$[x] = \sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$$

5. La parte entera es un número natural.
6. $[x] \leq x < [x] + 1$
7. Los números naturales no son acotados superiormente.
8. Propiedad Arquimediana: $(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) nx > 1$.
9. Los racionales son densos en los reales:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}; x < y)(\exists q \in \mathbb{Q}) x < q < y$$

10. Raíz cuadrada: $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sup\{r \in \mathbb{R} : r^2 \leq x\}$
11. Raíz n-ésima: $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{x} = \sup\{r \in \mathbb{R} : r^n \leq x\}$
12. $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es el conjunto de los números irracionales.
13. Sumar cualquier número racional con un número irracional produce otro número irracional.
14. Multiplicar cualquier número racional no nulo con un número irracional produce otro número irracional.
15. Los irracionales también son densos en los reales.