MA1001-2 Introducción al Cálculo. Semestre 2014-2
Profesores: Natacha Astromujoff, Michał Kowalczyk
Profesores Auxiliares: Nicolás Tapia R., Nicolás Zalduendo V.

Tarea #2
Fecha de Entrega: 27 de Octubre de 2014

Problemas

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no idénticamente nula tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = f(x)f(y).$$

   (i) Demuestre $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
   (ii) Demuestre que $f(x) > 0$ si $x > 0$ y luego concluya que f es creciente.
   (iii) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = n$.
   (iv) Demuestre que para $q \in \mathbb{Q}$ $f(q) = q$.
   (v) Suponiendo que para toda sucesión (x_n) si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ demuestre $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Analice el dominio [1], imagen, crecimiento, la paridad, periocidad, signo, ceros, asíntotas, epiyectividad, inyectividad y determine, si existe, la función inversa de las siguientes funciones:

   (i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
   (ii) $f(x) = x + \sin x$
   (iii) $f(x) = |2x + 1| - |x + 2|$
   (iv) $f(x) = \dfrac{\sin\left(2(x - \frac{\pi}{12})\right)}{2\cos^2(x - \frac{\pi}{12}) - 1}$
   (v) $f(x) = (g \circ h)(x)$, donde $h(x) = 2x + 1$ y $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

3. *a*) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \geq 0, \\ x(1+x), & x < 0. \end{cases}$$

   (i) Determine los intervalos donde f es creciente/decreciente.
   (ii) Encuentre el máximo intervalo que contiene a 0 en $(-1, 1)$ donde f es biyectiva.
   (iii) Determine la inversa de f en este intervalo.

   b) (i) Determine la fórmula explícita de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica, impar, con periodo 3, lineal y creciente en $[0, 1]$, lineal y decreciente en $(1, 3]$ y tal que $f(1) = 1$ y $f(3) = 0$.
   (ii) ¿Es f única?
   (iii) ¿Cómo se pueden modificar las condiciones que definen f para que sea única?

[1] Domino implícito o simplemente domino es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f ésta bien definida

4. *a*) Demuestre las siguientes identidades:

   (i) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha=1$

   (ii) $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

   (iii) $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

   b) Considere la ecuación $\sin 3x+a\sin^2 x=0$ donde $a\in\mathbb{R}$ es una constante.

   (i) Use las identidades trigonométricas para reducir esta ecuación a una que contiene sólo las funciones trigonométricas de ángulo x.

   (ii) Resuelva la ecuación para $a=1$ y $a=-\frac{9}{16}$. ¿Cuántas soluciones hay en el intervalo $[0,2\pi)$ en cada caso? ¿Cuántas soluciones hay en $\mathbb{R}$?

   (iii) Determine el número posible de soluciones en el intervalo $[0,2\pi)$ dependiendo de los valores de a.

   c) Encuentre los ceros de la función $f(x)=\cos^3 x+\sin^3 x-1+\frac{1}{2}\sin 2x$.

   d) Usando el principio de Inducción Matemática demuestre:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)=\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).$$

   Luego concluya:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)(\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx)=\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).$$

   e) Considere la función $f(x)=\sin x$ restringida al intervalo $(\pi/2,3\pi/2)$. Demuestre que f tiene una inversa y exprese esta inversa en términos de la función $\arcsin x$.

5. Calcule, cuando existan, el ínf, sup, mín y máx de las siguientes conjuntos. En el caso de no existir argumente por qué:

   (i) $A=\{x<x^3\mid x\in\mathbb{R}\}$.

   (ii) $B=\{(-1)^n+2^{-n}\mid n\in\mathbb{N}\}$.

   (iii) $C=\{y\mid \sin x<y\leq\cos x,\ x\in[0,2\pi)\}$

6. *a*) Usando la definición de convergencia demuestre que la sucesión $a_n=\frac{\sin^n(n)}{n}$ converge.

   b) Demuestre que si la sucesión (a_n) converge entonces convergen las sucesiones:

   (i) $b_n=a_{n+k}$ con k fijo

   (ii) $c_n=a_{f(n)}$ donde $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente.

   c) Encuentre sucesiones a_n y b_n tales que cumplen simultÃ¡neamente que $\lim_{n\to\infty}a_n=l$, b_n es una sucesión acotada y la sucesión $c_n=a_nb_n$ no converge. Justifique.

   d) Calcule los límites de las siguientes sucesiones

   (i) $\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}$.

   (ii) $a_n=n\cos(n)(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1})$.

   e) Discuta la existencia o inexistenicia del límite de la sucesión

$$a_n=\frac{\sqrt[3]{n^k+1}-\sqrt[3]{n^k-1}}{\sqrt{n^m+1}-\sqrt{n^m-1}}$$

   dependiendo de los valores de $k,m\in\mathbb{N}$.

7. *a*) Sean (a_n) y (c_n) sucesiones convergentes y sea (b_n) tal que

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N_0, \quad a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Demuestre que la sucesión (b_n) es acotada.

b) Sea (a_n) una sucesión acotada. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

(i) Demuestre que la sucesión (b_n) es decreciente.

(ii) Demuestre que (b_n) es convergente.

(iii) Encuentre el límite de b_n si $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

c) Encuentre los límites

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, con $a, b > 0$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n$ con $k \in \mathbb{N}$ fijo.

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)^n$.