MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Auxiliar 10 y Repaso

15 de Octubre de 2014

P1.

1. Sea $q \in \mathbb{Q}$. Muestre que existe una sucesión (s_n) de números irracionales que converge a q.
2. Use adecuadamente el Teorema de las Sucesiones Monótonas para demostrar que las siguientes sucesiones convergen, y calcule su límite.
   a) $s_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{s_n}$; con $s_0 = 2$.
   b) $s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$; con $s_0 = \sqrt{2}$.
   c) $s_{n+1} = \dfrac{s_n}{1+s_n}$; con $s_0 = 1$.
3. Sean a_n y b_n dos sucesiones tales que $0 < b_0 < a_0$ y que cumplen
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$
para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que ambas sucesiones son convergentes, y que lo hacen al mismo límite.

P2. Calcule el límite de las siguientes sucesiones. En caso de no existir, justifique la divergencia.

1. $a_n = \dfrac{n^3 2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$
2. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n + 1}{n^2 3^{n+1}}}$
3. $a_n = \dfrac{n! - 1}{(n+1)! + 1}$
4. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$, $k \in \mathbb{N}$
5. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}}$
6. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

P3. Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{n}{n^2+1}\right)^n}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = 1$$

Y concluya que $\left(1 + \dfrac{n}{n^2+1}\right)^n \to e$.

P4.

1. Demuestre por definición que $\dfrac{2n}{3n+1} \to \dfrac{2}{3}$.

2. Una sucesión (s_n) se dice *de Cauchy* cuando satisface $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\ |s_n - s_m| \leq \varepsilon$. Pruebe que si una sucesión es convergente, entonces es de Cauchy.

3. Calcule el límite de las siguientes sucesiones. En caso de no existir, justifique la divergencia.

   a) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\,\mathrm{sen}(n!)}{n+1}$

   b) $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n + \cos(n)}$

   c) $a_n = \dfrac{n^2 + n!}{2n + 6(n!)}$

P5.

1. Resuelva la ecuación $\csc^2(x) - \csc(x) = 2$.

2. Demuestre las siguientes identidades. Solo puede usar la Identidad Fundamental y la suma y diferencia en seno y coseno. Cualquier otro resultado debe probarse.

   a) $\dfrac{\mathrm{sen}(2x)}{2\,\mathrm{sen}(x)} = \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   b) $\dfrac{\mathrm{sen}(x-y)}{\mathrm{sen}(x+y)} = \dfrac{\tan(x) - \tan(y)}{\tan(x) + \tan(y)}$

P6. En cada pregunta debe argumentar, en primer lugar, *por qué* el supremo o el ínfimo existen, según corresponda.

1. Sea $B \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Se define $A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es una cota inferior de } B\}$. Demuestre que A es no vacío y acotado superiormente, y que $\sup(A) = \text{ínf}(B)$.

2. Sea $S \in \mathbb{R}$ no vacío y acotado, y sea $b < 0$. Se define $bS = \{bs : s \in S\}$. Demuestre que $\text{ínf}(bS) = b\sup(S)$.

3. Sea
$$E = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \{1, 2, \ldots\} \right\}$$
   Encuentre el ínfimo y el supremo, si es que existen, justificando su respuesta.
   Indicación: *Intente escribir E como $A + B$. Puede aplicar entonces el resultado para el supremo de esta clase de conjuntos. Para el ínfimo, quizás quiera* probar *algo similar.*