Auxiliar 10.

Ax. S $\equiv$ Axioma del supremo
T d S = Teorema del Sandwich.
T S M = Teorema de Sucesiones Monótonas.

Problemas Pendientes

P4 1.- pdq:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \left| \frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon.$$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Veamos que

$$\left| \frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{6n - 6n - 2}{9n+3} \right| = \frac{2}{9n+3} \leq \frac{2}{9n}$$

Veamos primero que $\frac{2}{9n} \leq \varepsilon \iff 2 \leq 9n\varepsilon \iff \frac{2}{9\varepsilon} \leq n.$

Luego si tomamos $n_0 = \left[\frac{2}{9\varepsilon}\right] + 1$ tendremos $\forall n \geq n_0,\ n \geq \frac{2}{9\varepsilon}.$

y luego $\frac{2}{9n} \leq \varepsilon$. Juntando tenemos

$$\left| \frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{9n+3} \leq \frac{2}{9n} \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon \quad ; \forall n \geq n_0.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, hemos demostrado que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\left| \frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon$, i,e, $\frac{2n}{3n+1} \to \frac{2}{3}$ //.

P5

1.- $\csc^2(x) - \csc(x) = 2$; $\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$; luego la ecuación es equivalente a $\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = 2$; $\operatorname{sen}(x) \neq 0.$

$$\iff 1 - \operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}^2(x) \iff 2\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) - 1 = 0 \quad ; u = \operatorname{sen}(x).$$
$$\iff 2u^2 + u - 1 = 0 \quad ; \Delta = 9$$
$$\iff u = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$$

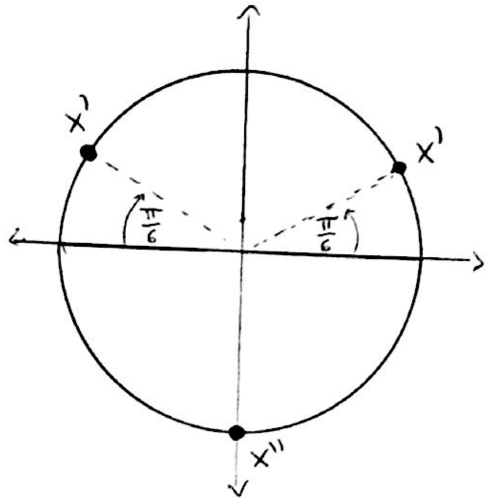
Luego $\operatorname{sen}(x) = -1 \vee \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$. Para la primera tenemos la solución $-\frac{\pi}{2}$. Para la segunda tenemos la solución $\frac{\pi}{6}$.

Recordando que la solución general de $\operatorname{sen}(x) = a$ con $|a| \leq 1$ es $x = k\pi + (-1)^k \alpha$, $\alpha = \operatorname{arcsen}(a)$, tenemos que son soluciones

$$x' = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{2} \quad ; \left\{ \ldots ; -\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} ; \ldots \right\}$$

$$x'' = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \quad ; \left\{ \ldots , \frac{\pi}{6} ; \pi - \frac{\pi}{6} , 2\pi + \frac{\pi}{6} , \ldots \right\}$$

Soluciones en el círculo:



* Note que $x'' = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

El conjunto solución estará dado por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \ \vee x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2.- a) pdq: $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2\operatorname{sen}(x)} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$

* Nota: debería ser capaz de reconocer la fórmula $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$.

dem: $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2\operatorname{sen}(x)} = \dfrac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2\operatorname{sen}(x)} = \cos(x) = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ //

Resultados usados:

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

2.- b) pdq: $\dfrac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x+y)} = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{\tan(x)+\tan(y)}$.

dem: $\dfrac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x+y)} = \dfrac{\text{sen}(x)\cos(y) - \text{sen}(y)\cos(x)}{\text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)}$

De modo de formar las tangentes de ambos ángulos, dividimos numerador y denominador por ambos cosenos (ie, por $\cos(x)\cos(y)$).

$$= \dfrac{\dfrac{\text{sen}(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} - \dfrac{\text{sen}(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}}{\dfrac{\text{sen}(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} + \dfrac{\text{sen}(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}} = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{\tan(x)+\tan(y)} \quad //$$

<u>Solución rápida de lo hecho en clases</u>

P1) 1.- Por densidad, siempre podemos encontrar un irracional entre q y $q+\frac{1}{n}$, para cada $n\in\mathbb{N}$; sea "r_n" este número, luego para cada n, $q < r_n < q+\frac{1}{n}$. Naturalmente esto conforma una sucesión (r_n). Como $q \to q$ y $q+\frac{1}{n} \to q$, por TdS la desigualdad implica $r_n \to q$.

2.- a) • pdq: $s_n \geq 1$. $\forall n\in\mathbb{N}$

Para s_0 esto se tiene; supongamos que se tiene para un $n\in\mathbb{N}$, ie, que $s_n \geq 1$. Luego

$$s_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{s_n} \leq 1 \;\; /+1 \Rightarrow 1+\frac{1}{s_n} \leq 2 \;\; /-\frac{1}{s_n} \Rightarrow 1 \leq 2-\frac{1}{s_n} = s_{n+1}$$

Luego $s_n \geq 1 \Rightarrow s_{n+1} \geq 1$. Por inducción, se tiene lo pedido.

• pdq: $s_{n+1} \leq s_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Para $n=0$, $s_0 \geq s_1$ (evalúen). Supongamos que se tiene para un $n\in\mathbb{N}$, ie, que $s_{n+1} \leq s_n$. Luego

$$s_{n+1} \leq s_n \Rightarrow \frac{1}{s_{n+1}} \geq \frac{1}{s_n} \Rightarrow -\frac{1}{s_{n+1}} \leq -\frac{1}{s_n} \Rightarrow 2-\frac{1}{s_{n+1}} \leq 2-\frac{1}{s_n}$$

$\Rightarrow s_{n+2} \leq s_{n+1}$. Luego $s_{n+1} \leq s_n \Rightarrow s_{n+2} \leq s_{n+1}$. Por inducción, se tiene lo pedido.

• Puesto que s_n decrece y es acot. inf, por TSM converge. Supongamos que $s_n \to l$. Luego

$$s_{n+1} = 2-\frac{1}{s_n} \Rightarrow l = 2-\frac{1}{l} \Rightarrow l^2-2l+1=0 \Rightarrow l=1.$$

Luego $s_n \to 1$.

b) Es análogo, con

- pdq: $s_n \leq 2$
- pdq: $s_{n+1} \geq s_n$

} Proceder por inducción

(s_n) creciente y acotado sup $\overset{TSM}{\Longrightarrow}$ converge a un l. Luego

$s_{n+1} = \sqrt{2s_n} \Rightarrow l = \sqrt{2l} \Rightarrow l^2 = 2l \Rightarrow l_1 = 0 \vee l_2 = 2.$

Puesto que crece, se descarta $l_1 = 0$. Luego $s_n \to 2$.

c) Análogo, con

- pdq: $s_n \geq 0$
- pdq: $s_{n+1} \leq s_n$

} Proceder por inducción

(s_n) decreciente y acot. inf $\overset{TSM}{\Longrightarrow}$ converge a un l. Luego

$s_{n+1} = \dfrac{s_n}{1+s_n} \Rightarrow l = \dfrac{l}{1+l} \Rightarrow l + l^2 = l \Rightarrow l = 0$. Luego $s_n \to 0$.

3.- • pdq: $b_n \leq a_n$.

En efecto, $(a_{n-1} - b_{n-1})^2 \geq 0 \Rightarrow a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}b_{n-1} + b_{n-1}^2 \geq 0 \quad /^{+} 4a_{n-1}b_{n-1}$

$$\Rightarrow a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} + b_{n-1}^2 \geq 4a_{n-1}b_{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_{n-1} + b_{n-1})^2}{4} \geq a_{n-1}b_{n-1} \quad / \sqrt{(\ )}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \quad ; \quad a_n, b_n \geq 0$$

¿Por qué?

$$\Rightarrow a_n \geq b_n. \quad ; \forall n \in \mathbb{N}.$$

• pdq: $a_{n+1} \leq a_n$.

$b_n \leq a_n \Rightarrow a_n + b_n \leq 2a_n \Rightarrow \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq a_n \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$

• pdq: $b_{n+1} \geq b_n$

$a_n \geq b_n \Rightarrow a_n b_n \geq b_n^2 \Rightarrow \sqrt{a_n b_n} \geq b_n \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n.$

Combinando tenemos $b_0 \leq b_n \leq a_n \leq a_0 \Rightarrow b_n \leq a_0 \wedge a_n \geq b_0 \ ; \forall n \in \mathbb{N}.$

Como b_n creciente y acot. sup, y a_n decreciente y acot inf, convergen por TSM. Digamos $a_n \to a$ y $b_n \to b$. Luego

$\dfrac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} = a \Rightarrow a + b = 2a \Rightarrow a = b$ // (convergen al mismo límite) //

P2]

1.- $a_n = \dfrac{n^3 2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \dfrac{2n^3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \to 3$

2.- $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n+1}{n^2 3^{n+1}}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3n^2}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{\sqrt[n]{3}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to \dfrac{2}{3}.$

3.- $a_n = \dfrac{n!-1}{(n+1)!+1}$; $0 \leq a_n \leq \dfrac{n!}{(n+1)!} = \underbrace{\dfrac{1}{n+1}}_{\downarrow\, 0.} \Rightarrow a_n \to 0$

4.- $\dfrac{1}{\sqrt{n+i}}$ es nula, $\forall i$. Como a_n es suma de "k" nulas (note que k es fijo) entonces es nula. $a_n \to 0$.

5.- (Acá la suma no tiene una cant. fijo de elementos por lo que no se puede decir lo anterior).

$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$; $\dfrac{n}{\sqrt{n+n}} \leq a_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$. ; pero $\dfrac{n}{\sqrt{n+n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ que es no acotada.

¿Será que (a_n) diverge? Note :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{a_n} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \sqrt{\frac{n+1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 0$ y $\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} \to 0$, luego por TdS, $\dfrac{1}{a_n} \to 0$ y su inverso (por teorema), es decir, $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)^{-1} = a_n$, es no acotada y, luego, diverge.

6.- $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \iff \underbrace{\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2+n}}}_{\to 1} \leq a_n \leq \underbrace{\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2+1}}}_{\to 1.}$

Por TdS, $a_n \to 1$.

P3] $a_n = \dfrac{\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\dfrac{1+\frac{n}{n^2+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\dfrac{n^3+n^2+n}{n^3+n^2+n+1}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n^3+n^2+n+1}\right)^n.$

Sea $h_n = \dfrac{-1}{n^3+n^2+n+1}$; note que $h_n \to 0$ y $n h_n \to 0$. Como $a_n = (1+h_n)^n$; por teorema, tenemos $a_n \to 1$.

Note que $a_n \to 1$ (converge) y $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ (converge) ; luego su producto converge a $1 \cdot e$, ie :

$\left(1+\dfrac{n}{n^2+1}\right)^n = a_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$ //

P4]

2.- Como (s_n) converge, $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists n_0' \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0'$, $|s_n - L| \leq \varepsilon'$.

Sea $\varepsilon > 0$. Para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ sabemos que $\exists n_0' \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0'$, $|s_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos dos naturales n y m cualquiera tal que $n, m \geq n_0'$. Luego

$$|s_n - s_m| = |(s_n - L) - (s_m - L)| \leq |s_n - L| + |s_m - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es decir, para $\varepsilon > 0$ podemos tomar $n_0 = n_0'$, de modo que para $n, m \geq n_0$, se cumple $|s_n - s_m| \leq \varepsilon$. Como ε es arbitrario, hemos demostrado que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, |s_n - s_m| \leq \varepsilon$, ie, (s_n) es de Cauchy.

3.- a) $$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\,\operatorname{sen}(n!)}{n+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{\text{nula}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(n!)}_{\text{acotada}} \to 0$$

b) $$a_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + \cos(n)} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{2 + \frac{\cos(n)}{n}}$$; $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ (nula $\times$ acotada)

$\frac{\cos(n)}{n} \to 0$ (nula $\times$ acotada).

$\Rightarrow a_n \to \frac{1}{2}$

c) $$a_n = \frac{n^2 + n!}{2n + 6(n!)} = \frac{\frac{n^2}{n!} + 1}{2\frac{n}{n!} + 6}$$; $\frac{n^2}{n!} = \underbrace{\frac{1}{(n-2)!}}_{\text{nula}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\to 1} \to 0$

$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \to 0.$

$\Rightarrow a_n \to \frac{1}{6}.$

P6]

Extra: Trabajo de supremo e ínfimo para un intervalo cualquiera. Para fijar ideas, sea $I = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Es directo que es acotado y mientras no sea vacío, existen $\sup I$ y $\inf I$ por el AxS. (es cosa de exponer una cota y exponer un $x_0 \in I$).

pdq: $\sup I = b$.

dem: Supongamos que existe un ε pequeño (por ej, $\varepsilon \in (0, b-a)$), tal que $b - \varepsilon$ es cota superior. Como $b - \varepsilon < b$, por densidad $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $b - \varepsilon < c < b$. Puesto que $b - \varepsilon > a$, tenemos $a < c < b \Rightarrow c \in I$. Luego $\exists c \in I$ tal que $b - \varepsilon < c$ $\times$ con $b - \varepsilon$ es cota superior. Luego $\sup I = b$. //

pdq: $\inf I = a$

dem: análogamente, supongamos que existe un ε pequeño (por ej, $\varepsilon \in (b-a)$), tal que $a+\varepsilon$ es cota inferior. Como $a < a+\varepsilon$, por densidad $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < a+\varepsilon$. Puesto que $a+\varepsilon < b$, tenemos $a < c < b \Rightarrow c \in I$. Luego $\exists c \in I$ tal que $a+\varepsilon > c$ $\times$ con $a+\varepsilon$ es cota inf. Luego $\inf I = a$ //

1.- $B \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inf $\overset{Ax.S}{\Rightarrow}$ $\exists \inf B$.

Como B es acotado inferiormente, existe al menos una cota, por lo que $A \neq \emptyset$. Si tomamos $b_0 \in B$, $\forall c \in A$ se cumple $c \leq b_0$ (por ser cotas inferiores). Luego A es acot sup y por el Ax.S., $\exists \sup A$.

Puesto que $\forall c \in A$ se cumple $c \leq b$, para algún $b \in B$, se tiene que b es cota superior. Luego $\sup A \leq b$. Pero esto es válido $\forall b \in B$, luego $\sup A$ es cota inf de $B \Rightarrow \sup A \leq \inf B$.

Como $\inf B$ es cota inferior de B, $\inf B \in A \Rightarrow \inf B \leq \sup A$.

Luego por tricotomía, $\sup A = \inf B$.

2.- $S \in \mathbb{R}$ no vacío y acotado $\Rightarrow \exists \sup(S)$. por Ax. S.

Como $S \in \mathbb{R}$ es acotado, $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq s \leq M$, $\forall s \in S$.

Luego $bm \geq bs \geq bM$, $\forall s \in S \Rightarrow bm \geq x \geq bM$, $\forall x \in bS \Rightarrow bS$ es acotado. $(S \neq \emptyset \Rightarrow bS \neq \emptyset) \overset{Ax.S}{\Rightarrow} \exists \inf(bS)$.

Como $\sup S \geq s$, $\forall s \in S \Rightarrow b\sup(S) \leq bs$, $s \in S \Rightarrow b\sup S \leq x$, $\forall x \in bS$

$\Rightarrow b\sup S$ cota inferior de $bS \Rightarrow b\sup S \leq \inf(bS)$.

Como $\inf(bS) \leq x$, $\forall x \in bS \Rightarrow \inf(bS) \leq bs$, $\forall s \in S$, $\Rightarrow \frac{\inf(bS)}{b} \geq s$, $\forall s \in S$

$\Rightarrow \frac{\inf(bS)}{b}$ cota superior de $S \Rightarrow \frac{\inf(bS)}{b} \geq \sup S \Rightarrow \inf(bS) \leq b\sup S$.

$\therefore$ Por tricotomía, $b\sup S = \inf(bS)$.

3.- Primero recordemos que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \quad ; \quad \inf A = -\sup(-A) \quad ; \quad \sup A = -\inf(-A).$$

Donde $-A = \{x \in \mathbb{R} : x = -a,\ a \in A\}$.

$A+B = \{x \in \mathbb{R} : x = a+b\ ;\ a \in A,\ b \in B\}$.

Luego tenemos $\inf(A+B) = -\sup(-(A+B)) = -\sup((-A)+(-B))$

$= -\sup(-A) - \sup(-B) = \inf(A) + \inf(B)$

$\Rightarrow \inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Notemos que $E = A + (-A)$; donde $A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$.

Es fácil notar que $x \in A \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow A$ es acotado. Además $1 \in A$ $\Rightarrow A \neq \emptyset$. Luego por Ax. S, existen $\sup A$ y $\inf A$. De manera análoga, ya que $x \in (-A) \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow (-A)$ es acotado y $(-1) \in (-A)$, por Ax. S existen $\sup(-A)$, $\inf(-A)$.

Puesto que A y $(-A)$ poseen supremo e ínfimo, E también posee supremo e ínfimo (propiedad vista en clases o en apunte). Es más:

$$\sup E = \sup A + \sup(-A) = \sup A - \inf A$$
$$\inf E = \inf A + \inf(-A) = \inf A - \sup A.$$

¿$\sup A$ y $\inf A$?. Es fácil ver que $\sup A = 1$ y $\inf A = 0$. (tarea).

Luego $\sup E = 1 - 0 = 1$ y $\inf E = 0 - 1 = -1$ //