Auxiliar 14.
Solución P1-P6-P7.

P1 $f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ derivable en $\mathbb{R}$. $h(x) = \ln(f(x))$.

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(f(x+h)) - \ln(f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)}{h}$$

; pero f derivable $\Rightarrow$ f continua

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)}{f(x)} = 1.$

armando límite conocido:

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)}{\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1}{h}}_{(2)}$$

$$(1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)}{\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1} \quad ; \; u = \frac{f(x+h)}{f(x)} \quad = \lim_{u\to 1} \frac{\ln(u)}{u-1} = 1.$$

$h \to 0 \Rightarrow u \to 1$

$$(2) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)\cdot h} = \frac{1}{f(x)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pero f es derivable, por lo que el límite anterior existe y vale $f'(x)$.

Juntando ambos resultados obtenemos

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)}{\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1} \cdot \frac{\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1}{h} = 1 \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad //$$

P6|

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$; note que $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$.

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x) - 1}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{\cos(x) - 1}{x^2}}_{(2)}$$

(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{\cos(x) - 1} = \lim_{u \to 1} \dfrac{\ln(u)}{u - 1} = 1$

$u = \cos(x)$
$u \to 1$

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} = - \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}.$

Juntando los resultados :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x) - 1} \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = 1 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.))$$

b)

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{8}} \quad ; \qquad \text{recordar: } \begin{array}{l}(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\end{array}$$

$$* \quad \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{8}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4}{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4} = \frac{x-2^3}{(\sqrt{x}-\sqrt{8})\left[(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]}$$

$$= \frac{(x-2^3)(\sqrt{x}+\sqrt{8})}{(\sqrt{x}+\sqrt{8})(\sqrt{x}-\sqrt{8})((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{(x-8)(\sqrt{x}+\sqrt{8})}{(x-8)((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)}$$

Luego

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{8}} = \lim_{x\to 8} \frac{\cancel{(x-8)}}{\cancel{(x-8)}} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{8}}{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4} = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{8}}{(\sqrt[3]{8})^2+2\sqrt[3]{8}+4} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2^2+2\cdot 2+4} = \frac{\sqrt{2}}{3} \;//$$

c) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^r-1}{x-1} \quad ; \quad r\in\mathbb{R}^+$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e^{r\ln(x)}-1}{x-1} \quad ; \text{ note que } \lim_{x\to 1} r\ln(x) = 0.$$

$$= \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{e^{r\ln(x)}-1}{r\ln(x)}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{r\ln(x)}{x-1}}_{(2)}$$

(1) $$\lim_{x\to 1} \frac{e^{r\ln(x)}-1}{r\ln(x)} \; ; \; \begin{array}{l} u=r\ln(x) \\ u\to 0\end{array} \; = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1.$$

(2) $$\lim_{x\to 1} \frac{r\ln(x)}{x-1} = r \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = r\cdot 1 = r.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^r-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{r\ln(x)}-1}{r\ln(x)} \cdot \frac{r\ln(x)}{x-1} = 1\cdot r = r \;//.$$

Scanned by CamScanner

P7)

a) $f(x) = 1 + xe^x$

A.H.) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 + xe^x = 1 + \lim_{x\to\infty} \overset{\infty\ \infty}{xe^x} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + xe^x = 1 + \lim_{x\to-\infty} xe^x = 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}$; $u = -x \Rightarrow x = -u$, $u \to \infty$

$= 1 - \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} = 1 - 0 = 1.$

$\therefore$ No hay AH hacia $+\infty$, y la recta $y = 1$ es AH hacia $-\infty$.

A.V.) No hay, ya que no hay indefiniciones.

A.O.) Ya que hay AH hacia $-\infty$, solo podría haber A.O. hacia $+\infty$.

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \underset{\downarrow\ 0}{\frac{1}{x}} + \underset{\downarrow\ \infty}{e^x} = \infty$ $\therefore$ no hay AO.

b) $g(x) = \frac{6x^3 + 5x^2 + 1}{3x^2 + x}$

A.H.) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 + 1}{3x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \underset{\downarrow\ \infty}{x} \left(\underset{\downarrow\ \frac{6}{3} = 2}{\frac{6x^2 + 5x + \frac{1}{x}}{3x^2 + x}} \right) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 + 1}{3x^2 + x} = \lim_{x\to-\infty} \underset{\downarrow\ -\infty}{x} \left(\frac{6x^2 + 5x + \frac{1}{x}}{3x^2 + x} \right) = -\infty$

$\therefore$ No hay AH hacia algún lado (igual era esperable).

Scanned by CamScanner

A.V. Indefinición del denominador

$$3x^2+x=0 \iff x(3x+1)=0 \iff x=0 \vee x=-\frac{1}{3}.$$

Caso $x=0$

Veamos que $6x^3+5x^2+1=1$ cuando $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x^3+5x^2+1}{x(3x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{6x^3+5x^2+1}{3x+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow x=0$ es A.V.

Caso $x=-\frac{1}{3}$

Veamos que $6x^3+5x^2+1=\frac{4}{3}$ cuando $x=-\frac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} g(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} \frac{6x^3+5x^2+1}{x(3x+1)} = \lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} \underbrace{\frac{6x^3+5x^2+1}{x}}_{\to -4} \cdot \underbrace{\frac{1}{3x+1}}_{+\infty} = -\infty$$

Lo último ya que $\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} \frac{1}{3x+1}$; $\begin{matrix} u=3x+1 \\ u\to 0^+ \end{matrix} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty.$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ es A.V.

A.O. Como no hay AH hacia algún lado, hay que estudiar ambos infinitos.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 + 1}{3x^3 + x^2} = \frac{6}{3} = 2$$

note que el resultado no depende de si $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ (funciona en ambos)

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 + 1}{3x^2 + x} - 2x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + x} = \frac{3}{3} = 1$$

note nuevamente que no importa si $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

$\therefore$ $y = mx + n = 2x + 1$ es as. obl. hacia ambos lados.

c) $h(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - x}$

A.H. $$\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{xe^x}{e^x - x} = \lim_{x \to \infty} x \frac{e^x}{e^x - x} = \lim_{x \to \infty} \underbrace{x}_{\to \infty} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}}_{\to \frac{1}{1-0} = 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x}{x} - 1}$$

Pero $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ y claramente $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$.

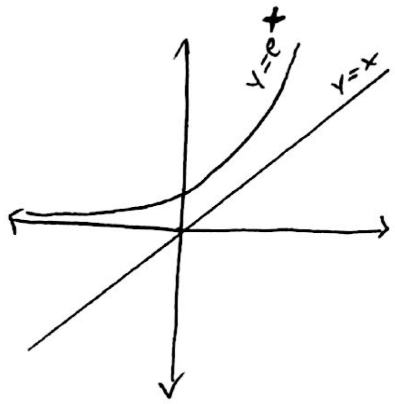
$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{\frac{e^x}{x} - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

$\Rightarrow$ $y = 0$ es AH hacia $-\infty$. No hay AH hacia $+\infty$.

A.V. La única indefinición podría ser $e^x - x = 0$ pero ello implica la existencia de un "x" tal que $e^x = x$. De la desigualdad fundamental tenemos

$$e^x \geq x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particular $e^x > x \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x - x = 0$ no posee solución (no hay indefiniciones). No hay A.V. !



no se tocan.

A.O. Solo revisamos $+\infty$ ya que en $-\infty$ hay AH.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}} = \frac{1}{1 - 0} = 1. \Rightarrow m = 1.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} h(x) - mx = \lim_{x \to \infty} \frac{xe^x}{e^x - x} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{xe^x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x - x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}} = 0 \cdot \frac{1}{1 - 0} = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow n = 0$$

$\Rightarrow y = mx + n = x$ es as. obl. hacia $+\infty$.

* Recuerden que $\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$; $\forall k \in \mathbb{N}$. !