Auxiliar 14

P2 - P3 - P4 - P5.

P2| La recta tangente al gráfico de una función f en $x = x_0$ está dada por

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Es decir, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente. Por lo tanto, necesitamos calcular $f(x_0)$ y $f'(x_0)$. En este caso $x_0 = 1$.

a) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x\,\mathrm{sen}(x)}{5x^3 - x + 4}$$

$$f(1) = \frac{3 + 2\,\mathrm{sen}(1)}{8}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x\,\mathrm{sen}(x))' \cdot (5x^3 - x + 4) - (3x^2 + 2x\,\mathrm{sen}(x)) \cdot (5x^3 - x + 4)'}{(5x^3 - x + 4)^2}$$

(*) $$(3x^2 + 2x\,\mathrm{sen}(x))' = (3x^2)' + (2x\,\mathrm{sen}(x))' = 3(x^2)' + 2(x\,\mathrm{sen}(x))'$$

$$= 3(x^2)' + 2[(x)'\,\mathrm{sen}(x) + x \cdot (\mathrm{sen}(x))']$$

$$= 3 \cdot 2x + 2[1 \cdot \mathrm{sen}(x) + x\cos(x)]$$

$$= 6x + 2\,\mathrm{sen}(x) + 2x\cos(x).$$

(*) $$(5x^3 - x + 4)' = (5x^3)' - (x)' + (4)' = 5(x^3)' - (x)' + (4)' = 5 \cdot 3x^2 - 1 + 0$$
$$= 15x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(6x + 2\,\mathrm{sen}(x) + 2x\cos(x))(5x^3 - x + 4) - (3x^2 + 2x\,\mathrm{sen}(x))(15x^2 - 1)}{(5x^3 - x + 4)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{(6 + 2\,\mathrm{sen}(1) + 2\cos(1)) \cdot 8 - (3 + 2\,\mathrm{sen}(1)) \cdot 14}{8^2} = \frac{6 - 12\,\mathrm{sen}(1) + 8\cos(1)}{64}.$$

Luego, la recta buscada es $f(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$ //.

Scanned by CamScanner

b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot\ln(x)}{xe^x}$; $f(1)=0$. (recuerde que $\ln(1)=0$).

$$f'(x) = \frac{(\cos(x)\cdot\ln(x))'\cdot xe^x - \cos(x)\cdot\ln(x)\cdot(xe^x)'}{(xe^x)^2}$$

(*) $(\cos(x)\cdot\ln(x))' = (\cos(x))'\ln(x) + \cos(x)\cdot(\ln(x))'$

$= -\operatorname{sen}(x)\cdot\ln(x) + \cos(x)\cdot\frac{1}{x}$

(*) $(xe^x)' = (x)'e^x + x\cdot(e^x)' = 1\cdot e^x + xe^x = e^x(1+x)$.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\left(-\operatorname{sen}(x)\ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}\right)xe^x - \cos(x)\cdot\ln(x)\cdot e^x(1+x)}{(xe^x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{[-\operatorname{sen}(1)\cdot\cancel{\ln(1)}^{\,0} + \cos(1)]e - \cos(1)\cdot\cancel{\ln(1)}^{\,0.}\cdot e(1+1)}{e^2}$$

$$= \frac{e\cos(1)}{e^2} = \frac{\cos(1)}{e}.$$

Luego, la recta buscada es $f(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(x) = \frac{\cos(1)}{e}x - \frac{\cos(1)}{e} \quad //$$

Scanned by CamScanner

P3] $f : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x^2)} & x \neq 0 \\ a & x = 0. \end{cases}$$

a) $\underline{x=1}$]

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln(x^2)}$$; notemos que $\lim_{x\to 1^+} \ln(x^2) = 0^+$, ya que $\ln(1)=0$

y $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow \ln(x^2) > 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln(x^2)} \;;\; \begin{matrix} u = \ln(x^2) \\ u \to 0^+ \end{matrix} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\frac{1}{\ln(x^2)}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{x}_{\to 1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln(x^2)}$$; de manera análoga, $\lim_{x\to 1^-} \ln(x^2) = 0^-$, ya que $0<x<1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow \ln(x^2) < 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln(x^2)} \;;\; \frac{u = \ln(x^2)}{u \to 0^-} = \lim_{u\to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$$

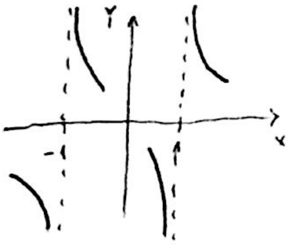
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln(x^2)} = -\infty.$$

Por lo tanto $\left.\begin{matrix} \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ límite global no existe ya que los límites laterales son distintos.

Scanned by CamScanner

$\boxed{x=-1}$

Forma rápida: puesto que $f(-x) = \frac{-x}{\ln((-x)^2)} = -\frac{x}{\ln(x^2)} = -f(x)$, la función es impar, y por esta simetría se tiene



simetría impar.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$$ límite global no existe ya que los laterales difieren.

Forma larga.

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{\ln(x^2)}$; $0 > x > -1$ (negativos) $\Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow \ln(x^2) < 0.$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^+} \ln(x^2) = 0^- \Rightarrow \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\ln(x^2)} \ ; \ \begin{array}{l} u = \ln(x^2) \\ u \to 0^- \end{array}$$

$$= \lim_{u\to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^+} \underbrace{\frac{1}{\ln(x^2)}}_{\downarrow \, -\infty} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow \, \to(-1)} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x}{\ln(x^2)}$; $x < -1$ (negativos) $\Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow \ln(x^2) > 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \ln(x^2) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{\ln(x^2)} \ ; \ \begin{array}{l} u = \ln(x^2) \\ u \to 0^+ \end{array}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \underbrace{\frac{1}{\ln(x^2)}}_{\downarrow \, +\infty} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow \, \to(-1)} = -\infty.$$

Scanned by CamScanner

b) Para que f sea continua en $x=0$ necesitamos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a.$$

Pero $\lim_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty$, ya que $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ y $x^2 \to 0^+$ cuando $x\to 0$.

Explícitamente: $\lim_{x\to 0} \ln(x^2)$; $\begin{matrix} u=x^2 \\ u\to 0^+ \end{matrix}$ $= \lim_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty$.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x^2)} = 0$ y además $\lim_{x\to 0} x = 0$ por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x^2)} \cdot x = 0 \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto, necesitamos tomar $a=0$.

c)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x^2)} = 0 \ //.$$

Scanned by CamScanner

P4)

$\Leftarrow$) Esto es trivial, ya que si la igualdad se satisface para todos los reales, en particular se cumple para los racionales.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\forall r \in \mathbb{Q}$ $f(r) = g(r)$.

La continuidad de ambas funciones nos asegura que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Por lo tanto, si nos acercamos a cualquier x_0 por un cierto subconjunto, el límite será el mismo (propiedad de límites a través de un subconjunto. Tomemos el límite a través de los racionales hacia un $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Luego, considerando $r \in \mathbb{Q}$

$$\lim_{\substack{r \to x_0 \\ r \in \mathbb{Q}}} f(r) = f(x_0) \wedge \lim_{\substack{r \to x_0 \\ r \in \mathbb{Q}}} g(r) = g(x_0)$$

Pero por la hipótesis, $\lim_{\substack{r \to x_0 \\ r \in \mathbb{Q}}} f(r) = \lim_{\substack{r \to x_0 \\ r \in \mathbb{Q}}} g(r) = g(x_0)$. Por unicidad

del límite, necesariamente $f(x_0) = g(x_0)$. Como x_0 fue arbitrario, necesariamente $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ //.

Como demostramos la doble implicancia, se concluye la equivalencia //

Scanned by CamScanner

P5) Sea h_n nula ($h_n \to 0$) con $h_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $nh_n \to x$ con $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim (1+h_n)^n = \lim \exp(n \ln(1+h_n))$$

$$= \lim \exp\left(n \left(\frac{\ln(1+h_n)}{h_n}\right) h_n\right)$$

$$= \lim \exp\left(nh_n \cdot \frac{\ln(1+h_n)}{h_n}\right)$$

Pero $h_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{\ln(1+h_n)}{h_n} \to 1$ y además $nh_n \to x$; por lo tanto.

$$\lim (1+h_n)^n = \lim \exp\left(nh_n \cdot \frac{\ln(1+h_n)}{h_n}\right) = \exp\left(\lim nh_n \frac{\ln(1+h_n)}{h_n}\right)$$

$$= \exp(x \cdot 1) = \exp(x) = e^x$$

$$\therefore \lim (1+h_n)^n = e^x \;//$$

Scanned by CamScanner