Auxiliar 15

Solución

P1] El punto de intersección pedido es aquél que cumple $y=0$; $x>0$.

$$e^{\operatorname{arcsen}(xy)} = \ln(1+x^2+y^2) \xrightarrow{y=0} e^{\operatorname{arcsen}(0)} = \ln(1+x^2) \Rightarrow e^0 = \ln(1+x^2) \Rightarrow 1 = \ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow 1+x^2 = e \Rightarrow x = \sqrt{e-1} > 0.$$

Por lo tanto se pide la recta tangente en $(x_0 ; y_0) = (\sqrt{e-1} ; 0)$.

Antes de derivar, debemos derivar $\operatorname{arcsen}(x)$ [inversa de $\operatorname{sen}(x)$]:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ahora derivamos implícitamente: (y recordando hacer las reglas de cadenas)

$$e^{\operatorname{arcsen}(xy)} = \ln(1+x^2+y^2) \quad \Big/ \frac{d}{dx}(\quad)$$

$$e^{\operatorname{arcsen}(xy)} \cdot \left[\operatorname{arcsen}(xy)\right]' = \frac{1}{1+x^2+y^2} \cdot \left[1+x^2+y^2\right]'$$

$$e^{\operatorname{arcsen}(xy)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}} \cdot [xy]' = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left[0+2x+2y\cdot y'\right]$$

$$e^{\operatorname{arcsen}(xy)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}\left[y+xy'\right] = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left[2x+2y\cdot y'\right].$$

Evaluando en $y_0=0$: $\quad e^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0}}\left[0+xy'\right] = \frac{1}{1+x^2+0}(2x+0)$

$$\Rightarrow \quad xy' = \frac{2x}{1+x^2}. \Rightarrow y' = \frac{2}{1+x^2}$$

Y reemplazando $x_0 = \sqrt{e-1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y' = \frac{2}{e}}$ que corresponde a la derivada de $y(x)$ en el punto pedido.

Por lo tanto, la recta es $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = y'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{e}\left(x - \sqrt{e-1}\right) //$$

P2]

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En palabras, ya que f en $[0, \infty)$ corresponde a una función derivable, su derivada existe en $(0, \infty)$ [note el intervalo abierto] y vale $2x$. Análogo para $(-\infty, 0)$, en donde $f'(x)$ está definida por $-2x$ en $(0, \infty)$.
Solo falta analizar $x = 0$.
Por definición:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0. \Rightarrow f'(0) = 0 \text{ existe } \checkmark.$$

Nota: se puede resumir $f'(x) = 2|x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

P3] $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$; recordar: $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ de P1]

$$f'(x) = \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right]' = \operatorname{arcsen}'\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{[2\sqrt{x}]'(1+x) - (2\sqrt{x})(1+x)'}{(1+x)^2}\right)$$

Pero:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)^2 - 4x}{(1+x)^2}}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 - 4x}} = \frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{1 + 2x + x^2 - 4x}} = \frac{|1+x|}{\sqrt{1 - 2x + x^2}} = \frac{|1+x|}{\sqrt{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{|1+x|}{|1-x|} \gg$$

y:

$$\left(\frac{(2\sqrt{x})'(1+x) - (2\sqrt{x})(1+x)'}{(1+x)^2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+x) - 2\sqrt{x} \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{(1+x) - \overbrace{2\sqrt{x}\sqrt{x}}^{2x}}{(1+x)^2 \sqrt{x}} = \frac{(1-x)}{(1+x)^2 \sqrt{x}} \gg$$

$$\therefore f'(x) = \frac{|1+x|}{|1-x|} \cdot \frac{(1-x)}{(1+x)^2 \sqrt{x}} //$$

Scanned by CamScanner

P4)

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)^{\cos(x)} \qquad x \in (0, \pi).$$

$$= e^{\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))}$$ y ahora derivamos con regla de la cadena.

$$f'(x) = \left[e^{\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))}\right]' = e^{\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))} \cdot \left[\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\right]' = \operatorname{sen}(x)^{\cos(x)} \cdot \left[\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\right]'$$

Pero $\left[\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\right]' = \left[\cos(x)\right]'\ln(\operatorname{sen}(x)) + \cos(x) \cdot \left[\ln(\operatorname{sen}(x))\right]'$

$$= -\operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) + \cos(x) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \left[\operatorname{sen}(x)\right]'$$

$$= -\operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \operatorname{sen}(x)^{\cos(x)} \cdot \left[\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\right]$$

Y ahora

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = \left[\underbrace{\operatorname{sen}(x)^{\cos(x)}}_{\text{esto es } f \text{ y } f' \text{ ya lo calculamos.}} \left[\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\right]\right]'$$

$$= \left[\operatorname{sen}(x)^{\cos(x)}\right]'\left[\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\right] + \left[\operatorname{sen}(x)^{\cos(x)}\right]\left[\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\right]'$$

$$= \operatorname{sen}(x)^{\cos(x)}\left[g^2(x) + g'(x)\right]$$

Donde $g(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x))$. Solo falta conocer $g'(x)$.

$$g'(x) = \left[\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right]' - \left[\operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x))\right]' = \frac{\left[\cos^2(x)\right]'\operatorname{sen}(x) - \cos^2(x) \cdot \left[\operatorname{sen}(x)\right]'}{\operatorname{sen}^2(x)} - \left(\left[\operatorname{sen}(x)\right]'\ln(\operatorname{sen}(x)) + \operatorname{sen}(x)\left[\ln(\operatorname{sen}(x))\right]'\right)$$

$$= \frac{2\cos(x)\left[\cos(x)\right]'\operatorname{sen}(x) - \cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} - \left(\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) + \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\left[\operatorname{sen}(x)\right]'\right)$$

$$= \frac{-2\cos(x)\operatorname{sen}^2(x) - \cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} - \left(\cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) + \cos(x)\right)$$

$$g'(x) = -2\cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} - \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) - \cos(x).$$

$$= -3\cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} - \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x)).$$

Por lo tanto, $f''(x) = \operatorname{sen}^{\cos(x)}\left[g^2(x) + g'(x)\right]$.

P5)

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{x-2}{x-4}\right)} \cdot \left(\frac{x-2}{x-4}\right)' = \frac{x-4}{x-2} \cdot \left[\frac{(x-2)'(x-4) - (x-2)(x-4)'}{(x-4)^2}\right].$$

$$= \frac{1}{(x-2)(x-4)}\left(1 \cdot (x-4) - (x-2) \cdot 1\right) = \frac{-2}{(x-2)(x-4)}$$

Veamos la derivada n-ésima de $\frac{1}{x-c}$; $c \in \mathbb{R}$. Sea $h(x) = \frac{1}{x-c}$.

$$h(x) = (x-c)^{-1}$$
$$h'(x) = (-1)(x-c)^{-2} \cdot (x-c)' = (-1)(x-c)^{-2}$$
$$h''(x) = (-1)(-2) \cdot (x-c)^{-3} \cdot (x-c)' = (-1)(-2)(x-c)^{-3}$$
$$h'''(x) = (-1)(-2)(-3)\,(x-c)^{-4}$$
$$\Rightarrow h^{(k)} = (-1)(-2) \cdot \ldots \cdot (-k) \cdot (x-c)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k k!}{(x-c)^{k+1}}$$

En particular con $c=2$ y $c=4$ tenemos:

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x-2)^{k+1}}$$
$$\left(\frac{1}{x-4}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x-4)^{k+1}}.$$

Ya encontramos $f^{(n)}(x)$ con $n=0$ $[f(x)]$ y $n=1$ $[f'(x)]$. Para $n > 1$ ocupamos Leibnitz de la siguiente manera.

$$f^{(n)}(x) = \left(f'(x)\right)^{(n-1)} = -2\left[\frac{1}{(x-2)} \cdot \frac{1}{(x-4)}\right]^{(n-1)}$$

$$= -2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{(x-2)}\right)^{(k)}\left(\frac{1}{(x-4)}\right)^{(n-1-k)}$$ y con lo encontrado antes

$$= -2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^k k!}{(x-2)^{k+1}} \; \frac{(-1)^{n-1-k}(n-1-k)!}{(x-4)^{n-k}}$$

Pero $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$, por lo tanto

$$f^{(n)}(x) = -2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\cancel{k!(n-1-k)!}} \frac{(-1)^k \cancel{k!}}{(x-2)^{k+1}} \frac{(-1)^{n-1-k}\cancel{(n-1-k)!}}{(x-4)^{n-k}} \quad ; (-1)^k(-1)^{n-1-k} = (-1)^{n-1}.$$

$$f^{(n)}(x) = -2(-1)^{n-1}(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x-2)^{k+1}} \frac{1}{(x-4)^{n-k}} = 2(-1)^n(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x-2)^{k+1}(x-4)^{n-k}}$$

P6| El pol de Taylor de orden "n" en torno a $x_0=0$ des $f(x)$ es:

$$p(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

a) $f^{(k)}(x) = (xe^x)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x)^{(i)} (e^x)^{(k-i)} = e^x \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x)^{(i)}$

Notemos $(x)^{(0)} = x$; $(x)^{(1)} = 1$ y $(x)^{(i)} = 0 \; \forall i > 1$. Puesto que $i \leq k$, tenemos:

K=0| En este caso $f^{(k)}(x) = f(x)$ el cual ya habíamos sacado de la sumatoria.

$k \geq 1$| Aquí i puede tomar los valores $i=0$ e $i=1$ de donde obtenemos:

$$f^{(k)}(x) = e^x \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x)^{(i)} = e^x\left(\binom{k}{0}x + \binom{k}{1}\cdot 1\right) \quad [\text{todo lo demás es nulo}].$$

$$= e^x(x+k) = xe^x + ke^x$$

Por lo tanto tenemos $f(0) = 0$ y $f^{(k)}(0) = k$ (con $k \geq 1$). El polinomio es:

$$p(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!}.$$

b) $g^{(k)}(x) = \left(x^2 \cdot \frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^2)^{(i)} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k-i)}$

Donde $(x^2)^{(0)} = x^2$; $(x^2)^{(1)} = 2x$; $(x^2)^{(2)} = 2$; $(x^2)^{(i)} = 0$; $i > 2$.

Y $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left((1-x)^{-1}\right)' = (-1)(1-x)^{-2} \cdot (1-x)' = (1-x)^{-2}$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left((-2)(1-x)^{-3} \cdot (1-x)'\right) = 2 \cdot (1-x)^{-3}$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)''' = 2(-3)(1-x)^{-4}(1-x)' = 2 \cdot 3 (1-x)^{-4}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \,(1-x)^{-(k+1)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$

$$\Rightarrow g^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^2)^{(i)} \frac{(k-i)!}{(1-x)^{k-i-1}}$$

Notemos que si $x=0$, el único término que no se anula es el correspondiente a $i=2$, ya que en este caso $(x^2)^{(2)} = 2$ que se anula al reemplazar $x=0$ (de hecho no depende de x el valor). Por lo tanto tenemos:

$$g^{(0)}(0) = 0 \;;\; g^{(1)}(0) = 0 \;;\; g^{(k)}(0) = \binom{k}{2} (x^2)^{(2)} \frac{(k-2)!}{(1-x)} \Bigg|_{x=0} \quad \text{con } k \geq 2.$$

Pero $(x^2)^{(2)} = 2$ y $\frac{1}{1-x} = 1$ cuando $x=0$. así que

$$g^{(k)}(0) = \binom{k}{2} \cdot 2 \, \frac{(k-2)!}{1} = \frac{k!}{\cancel{2!(k-2)!}} \, \frac{\cancel{2(k-2)!}}{1} = k! . \qquad k \geq 2.$$

$$\Rightarrow p(x) = g(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=2}^{n} \frac{k!}{k!} x^k = \sum_{k=2}^{n} x^k = x^2 + x^3 + \ldots + x^n \;//$$

Scanned by CamScanner